# Wiskundige Analyse 1

Belangrijkste stellingen

## 1 Getallen

- **Driehoeksongelijkheid** : $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$
- **Supremumprincipe** : *Elke nietlege verzameling reële getallen die naar boven begrensd is, heeft een supremum.*
- **Infimumprincipe :** *Elke nietlege verzameling van reële getallen die naar onder begrensd is, heeft een infimum.*
- **Kenmerkende eigenschappen van het supremum** *: Zij $X$ een nietlege verzameling reële getallen. Het reëel getal $\omega$ is dan en slechts dan het supremum van $X$ als de volgende twee eigenschappen gelden:*

  1. *voor elke $x \in X$ is $x \leqslant \omega$*
  2. *voor elke $\varepsilon < 0$ bestaat er een $x_\varepsilon \in X$ met $\omega - \varepsilon < x_\varepsilon$*

- **Kenmerkende eigenschap van het infimum :** *Zij $X$ een nietlege verzameling reële getallen. Het reëel getal $\alpha$ is dan en slechts dan het infimum van $X$ als de volgende twee eigenschappen gelden:*

  1. *voor elke $x \in X$ is $\alpha \leqslant x$*
  2. *voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $x_\varepsilon \in X$ met $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$*

## 2 Reële rijen

- **Convergentie :** *Een reële rij $(x_n)$* **convergeert naar a** *$(a \in \mathbb{R})$ als*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^+)(n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$$

- **Divergentie naar $+\infty$ :***Een reële rij $(x_n)$* **divergeert naar $+\infty$** *als*

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^+)(n \geqslant N \Longrightarrow x_n > N)$$

- **Divergentie naar $-\infty$ :***Een reële rij $(x_n)$* **divergeert naar $-\infty$** *als*

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^+)(n \geqslant N \Longrightarrow x_n < N)$$

- **Sandwich-regel :** *Als $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ voor alle $n$, en als $x_n \to a, z_n \to a$, dan ook $y_n \to a$*
- **Stelling van de convergente deelrij, stelling van Bolzano-Weierstrass :** *Als alle termen van een rij in het compact interval $[a,b]$ liggen, dan bezit die rij een deelrij die convergeert naar een punt van dat interval.*
- **Kenmerk van Cauchy :** *Een rele rij $(x_n)$ convergeert dan en slechts dan als er bij elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijke $N_\varepsilon$ bestaat met de eigenschap*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ als } n > N_\varepsilon, m > N_\varepsilon$$

- **Stelling van de vernestelde compacte intervallen :** *Is $[a_1,b_1],[a_2,b_2],...$ een rij van nietlege compacte intervallen met de eigenschap*

$$[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq [a_3,b_3] \supseteq ...$$

*dan is* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}[a_n, b_n] \neq \emptyset$, *m.a.w. er bestaat minstens één reële* $\xi$ *die tot alle* $[a_n, b_n]$*'s behoort. Als bovendien*

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

*dan is die* $\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}[a_n, b_n]$*uniek, en*

$$\xi = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

.

- **Cantor :** *Een compact interval* $[a, b]$ *met* $a < b$ *is niet aftelbaar.*

# 3 Limieten van functies

- **Limiet van f voor x → a :** *Zij f een functie* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *met domein D, en zij a een ophopingspunt van D. L is de limiet van f (voor* $x \to a$*) :*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

- **Rijenkenmerk voor limieten :** *De eigenschap* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *is gelijkwaardig met: voor elke rij* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *uit* $D/\{a\}$*die naar a convergeert, convergeert die rij van de functiewaarden* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^+}$ *naar L.*

- **Behoud van teken :** *Als* $f(x) \to L$ *voor* $x \to a$, *en* $L > 0$ *(resp.* $L < 0$*), dan bestaat er een doorprikte omgeving van a waarover f positief (resp. negatief) is.*

- **Gedrag op oneindig van nietconstante reële veeltermen :** *Is* $n \geqslant 1$ *en* $a_n > 0$, *dan is*

$$\lim_{x\to\infty}(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = +\infty$$

# 4 Continuïteit

- **Rijenkenmerk voor continuïteit :** *De functie f is dan en slechts dan continu in* $a \in D$ *als geldt: voor elke rij uit D die convergeert naar a is de rij van de functiewaarden convergent naar f(a).*

- **Behoud van teken :** *Is f continu in a en is* $f(a) \neq 0$, *dan behoudt f haar teken in een omgeving van a.*

- **Tussenwaardestelling, bijzonder geval :** *Zij* $a < b$. *Als* $f(a) < 0$ *en* $f(b) > 0$ *(resp.a* $> b$. *Als* $f(a) < 0$*), en als f continu is over het compact interval* $[a, b]$, *dan bestaat er minstens één* $c \in ]a, b[$ *waarvoor* $f(c) = 0$.

- **Tussenwaardestelling, stelling van Bolzano :** *Zij f continu over het interval I (gelijk welk type). Elk getal dat ligt tussen twee verschillende functiewaarden van f/I is zelf een functiewaarde van f/I.*

- **Inverse van een continue strik monotone functie :**

  1. *Zij f strikt stijgend en continu over een interval I (gelijk welk type). Dan heeft f een inverse* $\phi$ *die strikt stijgend en continu is over het interval* $J := f(I)$.
  2. *Zij f strikt dalend en continu over een interval I (gelijk welk type). Dan heeft f een inverse* $\phi$ *die strikt dalend en continu is over het interval* $J := f(I)$.

- **Extremumstelling van Weierstrass :** *Als f continu is over het compact interval* $I = [a, b]$, *dan bereikt f/I minstens één keer haar kleinste waarde en minstens één keer haar grootste waarde, m.a.w. er bestaan* $x_1$ *en* $x_2$ *in I waarvoor*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \qquad \forall x \in I$$

- **Heine :** *Is f continu over het compact interval* $I = [a, b]$, *dan is f over I automatisch gelijkmatig continu.*

# 5 Afleidbaarheid

- **Kettingregel :** *Beschouw twee functies f en g:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, met samengestelde*

$$F(x) = g(f(x)) \ (x \in D_F)$$

*Als f afleidbaar is in a en g afleidbaar in f(a), dan is F eveneens afleidbaar in a, en*

$$F'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

- **Afleidbaarheid van inverse :** *Zij f continu en strikt stijgend of strikt dalend over het interval I (gelijk welk type), en veronderstel dat f afleidbaar is in een bepaald punt c van I, met f'(c)* $\neq$ *0. Dan is de inverse* $\phi$ *van f afleidbaar in f(c), en*

$$\phi'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

.

- **Nodige voorwaarde voor extremum :** *Bereikt f in a een lokaal extremum, en is f in a afleidbaar, dan is f'(a) = 0.*

- **Middelwaardestelling :** *Als* $a < b$ *en*
  1. *f is afleidbaar over* $]a, b[$
  2. *f is continu over* $[a, b]$

  *dan bestaat er minstens één* $c \in ]a, b[$ *waarvoor*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

- **Stijgen en dalen :** *Zij f afleidbaar in het open interval I. Dan hebben we:*
  1. *f is stijgend in* $I \iff (\forall x \in I)(f'(x) \geqslant 0)$
  2. *f is dalend in* $I \iff (\forall x \in I)(f'(x) \leqslant 0)$
  3. *f is constant in* $I \iff (\forall x \in I)(f'(x) = 0)$
  4. *Als voor elke* $x \in I$ *geldt dat* $f'(x) > 0$*, dan is f strikt stijgend in I.*

- **Regel van de l'Hospital voor rechterlimiet** $\frac{0}{0}$ **:** *Veronderstel dat*
  1. *f' en g' bestaan in een open interval* $]a, a + R[ \quad (R > 0)$
  2. $f(a+) = g(a+) = 0$
  3. $g(x) \neq 0$ *op* $]a, a + R[$
  4. $g'(x)$ *heeft een vast teken op* $]a, a + R[$

  *Dan hebben we:*

$$\textit{Als } \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \textit{ dan ook } \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

- **Regel van de l'Hospital voor limiet** $\frac{0}{0}$ **:** *Veronderstel dat*
  1. *f' en g' bestaan over* $]a - R, a + R[/\{a\} \quad (R > 0)$
  2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$
  3. $g(x) \neq 0$ *op* $]a - R, a + R[ \ / \ \{a\}$
  4. $g'(x) \neq 0$ *op* $]a - R, a + R[ \ / \ \{a\}$

  *Dan hebben we:*

$$\textit{Als } \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \textit{ dan ook } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

- **Regel van de l'Hospital voor limiet** $\frac{\infty}{\infty}$ **:** *Veronderstel dat*

1. *f' en g' bestaan in een open interval* $]a, +\infty[$ *met* $a \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$
3. $g(x) \neq 0$ *op* $]a, +\infty[$
4. $g'(x)$ *heeft een vast teken op* $]a, +\infty[$.

*Dan hebben we:*

$$\text{Als } \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \text{ dan ook } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

# 6 Integratie

- **Kenmerk van Darboux :** *De afbeelding* $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ *is dan en slechts dan integreerbaar over I als*

  1. *f begrensd is over I*
  2. *er bij elke* $\varepsilon > 0$ *een partitie* $\pi$ *van I bestaat met de eigenschap dat* $S_\pi - s_\pi < \varepsilon$

- **Lineariteit van de integraal :**

  1. *Is f integreerbaar over I, dan is ook* $c \cdot f$ *(met c constant) integreerbaar over I en*

  $$\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$$

  .

  2. *Zijn f en g integreerbaar over I, dan is ook f + g integreerbaar over I en*

  $$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

  .

- **Positiviteit van de integraal :** *Is f integreerbaar over I en is* $f(x) \geqslant 0$ *voor alle* $x \in I$, *dan is* $\int_a^b f \geqslant 0$.

- **De integraal is stijgend :** *Zijn f en g integreerbaar over I, met* $f(x) \leqslant g(x)$ *voor alle* $x \in I$, *dan is*

  $$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

- **Additiviteit van de integraal :** *Zij* $a < c < b$. *Is f integreerbaar over* $]a, b[$, *dan ook over* $]c, b[$*; omgekeerd, is f integreerbaar over* $]a, c[$ *en over* $]c, b[, danookover]a,b[$. *In beide gevallen geldt de identiteit*

  $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

  .

- **Driehoeksongelijkheid voor integralen :**

  $$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

- **Middelwaardestelling in integraalvorm :** *Als f continu is op* $[a, b]$, *dan bestaat er minstens één* $c \in [a, b]$ *waarover*

  $$\int_a^b f = (b - a) f(c)$$

- **Continuïteit van een integraal met veranderlijke bovengrens :** *Veronderstel dat $f$ integreerbaar is over het interval $]a, b[$ en dan $c \in [a, b]$. Definieer de functie*

$$F(x) := \int_c^x f \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

*Dan is $F$ continu over $[a, b]$.*

- **1e Hoofdstelling: afgeleide van een integraal met veranderlijke bovengrens :** *Is $f$ over het open interval $J$ continu, en is $c \in J$, dan bestaat de functie*

$$F(x) := \int_c^x f \qquad (x \in J)$$

*en is $F'(x) = f(x)$ voor elke $x \in J$.*

*Of als $f$ continu is:*

$$\left(\int_c^x f\right)' = f(x)$$

- **2e Hoofdstelling: integratie van een afgeleide :** *Als $f \in C^1[a, b]$, dan is*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

- **Partiële integratie :** *Als $f$ en $g$ van classe $C^1$ zijn over $[a, b]$, dan is*

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

- **Grens-naar-grens transformatie van een integraal :** *Zij $a < b, \theta \in C^1[a, b]$ en $f$ continu over het beeldinterval $\theta[a, b]$. Dan is*

$$\int_a^b f\big(\theta(x)\big) \cdot \theta(x)dx = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f(y)dy$$

# 7 Elementaire functies en praktische integratie

- **De (natuurlijke) logaritme :** $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *wordt gedefinieerd als*

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (x > 0)$$

- **Eigenschappen van $a^x$ met $a > 1$ :** *Is $a > 1$, dan hebben we de volgende eigenschappen:*
  1. *$a^x$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, en $(a^x)' = a^x \ln a$ voor alle $x$.*
  2. *$a^x$ is strikt stijgend met $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ en $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.*
  3. *Voor een willekeurige veeltermfunctie $P(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0$$

- **Eigenschappen van $a^x$ met $0 < a < 1$ :** *Is $0 < a < 1$, dan hebben we de volgende eigenschappen.*
  1. *$a^x$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, en $(a^x)' = a^x \ln a$ voor alle $x$.*
  2. *$a^x$ is strikt dalend met $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ en $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.*

- **Eigenschappen van $x^a$ met $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ :**

  1. *$x \mapsto x^a$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$, en $(x^a)' = ax^{a-1}$ voor alle $x > 0$.*
  2. *Als $a > 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt stijgend; is $a < 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt dalend met $\lim_{x\to 0+} x^a = +\infty$; is $a = 0$, dan is $x \mapsto x^a$ constant 1.*
  3. *Voor elke $a > 0$ is $\lim_{x\to 0+} x^a = 0$.*

- **Euler, 1743 :** *Voor elke reële $x$ is*

$$\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{x}{t})^t = e^x$$

- **Hyperbolische functies :**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^2 x + 1}$$

- **Ongelijkheid van Jordan :**

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$$

*(met $0 < x < \frac{\pi}{2}$)*

- **Poolcoördinaten :** *Zij $P(x,y)$ een punt van het vlak $\mathbb{R}^2$, met $(x,y) \neq (0,0)$. Dan bestaat er een unieke* **voerstraal** *$r > 0$ en een unieke* **poolhoek** *$\theta$ in een halfopen interval met lengte $2\pi$ (bijvoorbeeld in $]-\pi,\pi]$ of in $[0,2\pi[$) waarvoor*

$$x = r\cos\theta \text{ en } y = r\sin\theta.$$

# 8 Complexe reeksen

- **Bovenlimiet van de rij $x_n$ :**

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{k\to+\infty}\sup_{n\geqslant k} x_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}\sup_{n\geqslant k} x_n$$

- **Hoofdeigenschap van de bovenlimiet :** *Is $x_1, x_2, ...$ een begrensde rij van reële getallen, dan bestaat er bij elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijke $N$ met de eigenschap dat*

$$x_n < \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n + \varepsilon$$

*voor alle $n > N$.*

- **Onderlimiet van de rij $x_n$ :**

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \lim_{k\to+\infty}\inf_{n\geqslant k} x_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}\inf_{n\geqslant k} x_n$$

- **Hoofdeigenschap van de onderlimiet :** *Is $x_1, x_2, ...$ een begrensde rij van reële getallen, dan bestaat er bij elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijke $N$ met de eigenschap dat*

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n - \varepsilon < x_n$$

*voor alle $n > N$.*

- **Complexe wortels :** *Zij* $z_0 = |z_0|.e^{i\theta_0}$ *(met* $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ *of* $\theta_0 \in ]-\pi, \pi]$*) een complex getal verschillend van nul, en* $n$ *een positief natuurlijk getal. Dan heeft de vergelijking* $\zeta^n = z_0$ *als oplossingen in* $\mathbb{C}$ *de* $n$ *complexe getallen*

$$\sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0}{n}}, \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+2\pi}{n}}, ..., \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}, ..., \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\theta_0+2(n-1)\pi}{n}}$$

- **Stelling van de convergente complexe deelrij :** *Elke rij* $z_1, z_2, ...$ *van complexe getallen uit de gesloten schijf*

$$\overline{B}(0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R$$

$(R > 0)$ *heeft een deelrij* $z_{n_1}, z_{n_2}, ...$ *die convergeert naar een punt* $z_0$ *van* $\overline{B}(0, R)$*.*

- **Associativiteit :** *Als men in een convergente reeks de termen door het plaatsen van haakjes groepeert, dan is ook de nieuwe reeks convergent, en wel naar de rekensom van de oude reeks.*
- **Lineariteit :**
  1. *Als* $\sum a_n$ *en* $\sum b_n$ *convergeren, dan is*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

  2. *Als* $\sum a_n$ *convergeert, en* $\alpha$ *is een complexe constante, dan is*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

- **Kenmerk van Cauchy voor reeksen :** *De complexe reeks* $\sum z_n$ *convergeert dan en slechts dan als er bij elke* $\varepsilon > 0$ *een natuurlijke* $N_\varepsilon$ *bestaat met de eigenschap dat*

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_{n+p}| < \varepsilon$$

*voor* $n \geqslant N_\varepsilon, p \geqslant 1$

- **Driehoeksongelijkheid voor reeksen :** *Als de reële reeks* $\sum |z_n|$ *convergeert, dan convergeert ook de complexe reeks* $\sum z_n$*, en*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$$

- **Majorantenregel :** *Zij* $\sum x_n$ *en* $\sum x'_n$ *twee reële reeksen zonder negatieve termen, waarvoor* $\sum_n x_n \ll \sum_n x'_n$*. Als* $\sum x'_n$ *convergeert, dan convergeert ook* $\sum x_n$*.*
- **Quotiëntregel :** *Zij* $\sum x_n$ *en* $\sum y_n$ *twee reële reeksen met louter positieve termen, waarvoor*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = A \in \mathbb{R}$$

  1. *als* $A > 0$*, dan geldt:*

$$\sum x_n \text{ convergeert} \iff \sum y_n \text{ convergeert}$$

  2. *als* $A = 0$*, dan geldt:*

$$\sum y_n \text{ convergeert} \Longrightarrow \sum x_n \text{ convergeert}$$

- **Vergelijking van groesnelheid :** *Als voor twee reeksen* $\sum x_n$ *en* $\sum y_n$ *met louter positieve termen vanaf een zeker rangnummer* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}$ *is, dan is* $\sum y_n \ll \sum x_n$*.*
- **Integraaltest :** *Zij* $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *continu en dalend. Stellen we* $I_n := \int_1^n f(x)dx$ *voor* $n \geqslant 1$*, dan convergeert de reeks* $\sum_{n\geqslant} f(n)$ *als en slechts als de rij* $(I_n)$ *convergeert*

- **Worteltest van Cauchy :** *Zij* $\sum x_n$ *een reële reeks zonder negatieve termen, en noem*

$$\lambda := \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

*. Dan hebben we:*

1. *als* $\lambda < 1$, *dan is* $\sum x_n$ *convergent*
2. *als* $\lambda > 1$, *dan is* $\sum x_n$ *divergeert naar* $+\infty$.

- **Convergentieregel van d'Alembert :** *Zij* $\sum x_n$ *een reële reeks met louter positieve termen waarvoor*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} := \lambda \in [0, +\infty]$$

*bestaat. Dan hebben we:*

1. *als* $\lambda < 1$, *dan is* $\sum x_n$ *convergent*
2. *als* $\lambda > 1$, *dan is* $\sum x_n$ *divergeert naar* $+\infty$.

- **Convergentieregel van Raabe :** *Zij* $\sum x_n$ *een reële reeks met positieve termen, waarvoor*

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1) := \mu \in [-\infty, +\infty]$$

*bestaat. Dan hebben we:*

1. *als* $\mu > 1$, *dan is* $\sum x_n$ *convergent*
2. *als* $\mu < 1$, *dan is* $\sum x_n$ *divergent.*

- **Voldoende voorwaarde van Leibniz, 1714 :** *Zij* $p_1 > p_2 > p_3 > ...$ *een strikt dalende rij van positieve getallen, met* $p_n \to 0$. *Dan hebben we:*

1. *de wisselreeks* $p_1 - p_2 + p_3 - ...$ *convergeert*
2. *de reekssom ligt tussen elk tweetal opeenvolgende partieelsommen.*

# 9 Gelijkmatige convergentie

- **Overdracht van continuïteit :** *Veronderstel dat* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continu zijn in* $x_0 \in [a, b]$ *en* $f_n \rightrightarrows^{[a,b]} f$ *voor zeker* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Dan is ook f continu in* $x_0$

- **Omwisselen van limiet en integraal :** *Zij* $f_n \rightrightarrows^{[a,b]} f$, *met elke* $f_n$ *continu over* $[a, b]$. *Dan is*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

*of m.a.w.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

- **Omwisselen van limiet en afgeleide :** *Veronderstel dat* $f_n$ *continu afleidbaar zijn op* $]a, b[$, *dat* $(f_n')_n$ *gelijkmatige convergeert over elk gesloten deelinterval van* $]a, b[$ *en dat* $(f_n(x_0))_n$ *convergeert voor zeker* $x_0 \in ]a, b[$. *Dan convergeert ook de rij* $(f_n)_n$ *op* $]a, b[$ *en*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)'\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \qquad \forall x \in ]a, b[$$

- **Overdracht van continuïteit :** *Zij* $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *gelijkmatig over* $[a, b]$, *waarbij* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continu zijn in* $x_0 \in [a, b]$. *Dan is ook* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continu in* $x_0$.

- **Omwisselen van reeks en integraal :** *Zij* $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *gelijkmatig over* $[a,b]$*, waarbij elke* $f_n$ *continu is over* $[a,b]$*. Dan is*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)$$

- **Omwisselen van reeks en afgeleide :** *Veronderstel dat* $f_n$ *continu afleidbaar zijn op* $]a,b[$*, dat* $\sum f_n'$ *gelijkmatig convergeert over elk gesloten deelinterval van* $]a,b[$ *en dat* $\sum f_n(x_0)$ *convergeert voor zeker* $x_0 \in ]a,b[$*. Dan convergeert ook* $\sum_n f_n$ *op* $]a,b[$ *en*

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x), \qquad \forall x \in ]a,b[.$$

- **M-test van Weierstrass :** *Zij* $\sum f_n$ *een reeks van functies* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, alle gedefinieerd over* $A \subseteq \mathbb{C}$*. Als er een rij* $(a_n)$ *van nietnegatieve getallen bestaat waarvoor geldt:*

  1. $|f_n(z)| \leqslant a_n$ *voor alle* $n \geqslant 1$ *en* $z \in A$
  2. $\sum a_n$ *convergeert,*

  *dan is de reeks* $\sum f_n$ *gelijkmatig convergent over* $A$*.*

# 10 Machtreeksen

- **Convergentiestraal van de machtreeks** $\sum a_n z_n$ **:**

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,+\infty]$$

- **Taylorontwikkeling afgeleid uit de meetkundige reeks** $(-1 < x < 1)$ **:**

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ...$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

- **Reeks van Leibniz :**

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

- **Taylorformule met integraalgedaante van de restterm :** *Is* $f$ *van de classe* $C^m (n \geqslant 1)$ *over het open interval* $U (x_0 \in U)$*, dan is voor elke* $x \in U$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2\frac{f''(x_0)}{2!} + ... + (x-x_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt.$$

- **Taylorformule met de restterm van Lagrange :** *Is* $f$ *van de classe* $C^n (n \geqslant 1)$ *over het open interval* $U (x_0 \in U)$*, dan bestaat er voor elke* $x \in U$ *in het compact interval met uiteinden* $x_0$ *en* $x$ *een* $\xi_x$ *waarvoor*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2\frac{f''(x_0)}{2!} + ... + (x-x_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + (x-x_0)^n\frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}.$$

- **Voldoende voorwaarden voor Taylorontwikkeling :** *Zij $a > 0$. Als $f$ onbepaald afleidbaar is over $]-a, a[$, en als er een constante $C$ bestaat met*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant C \qquad (-a < x < a, \quad n = 0, 1, ...)$$

*dan is*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \qquad (-a < x < a).$$

- **Goniometrische en exponentiële reeksen** ($x \in \mathbb{R}$) **:**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

- **Binomiaalreeks :** *Voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ en $-1 < x < 1$:*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} + ...$$

**Gevolg:**

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + ... \qquad (-1 < x < 1)$$

- **Convergentiestelling van Abel, 1826 :** *Zij $a_0 + a_1x + a_2x + ...$ een reële machtreeks met convergentiestraal $R = 1$. Als de machtreeks ook in het punt $x = 1$ convergeert, dan convergeert ze over heel het lijnstuk $[0, 1]$ gelijkmatig.*

- **Limietstelling van Abel :** *Zij $\sum a_nx^n$ een reële machtreeks, met convergentiestraal $R = 1$, en stel $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ voor $0 \leqslant x < 1$. Als de machtreeks ook in het punt $x = 1$ convergeert, dan is haar rekensom in dat punt gelijk aan $\lim_{x\to 1-} f(x)$, m.a.w.*

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0} +\infty a_nx^n = \sum_{n=0} +\infty a_n.$$

# 11 Fourierreeksen

- *Een* **Fourierreeks** *of* **goniometrische reeks** *is een reeks van functies van de vorm*

$$a_0 + \sum_{n\geqslant 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- **Hulpstelling van Riemann :** *Is $f$ continu op [a,b], dan is*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

- **Convergentie van de Fourierontwikkeling, bijzonder geval :** *Als $f$ $2\pi$-periodiek is en van klasse $C^1$ op heel $\mathbb{R}$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van $f$ op heel $\mathbb{R}$ naar $f$.*

- **Convergentie van de Fourierontwikkeling :** *Als $f$ $2\pi$-periodiek is en stuksgewijs $C^1$ over $[-\pi, \pi]$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van $f$ in elke $x \in \mathbb{R}$ naar $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*

- **De periodieke uitbreiding :** *Is $f$ stuksgewijs $C^1$ over $[-\pi, \pi]$, dan definieert men de functie $f^\pi$ (niet noodzakelijk overal gedefinieerd) die ontstaat door de beperking $f/[-\pi, \pi]$ periodiek met de periode $2\pi$ voort te zetten, als de periodieke uitbreiding.*

  *De* **genormaliseerde periodieke uitbreiding** *wordt gedefinieerd door*

$$f^{\pi,\nu}(x) := \frac{f^\pi(x+) + f^\pi(x-)}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

# 12 Lineaire differentiaalvergelijkingen

- **Oplossing van een lineaire differentiaalvergelijking van de 1e orde** $(y' + a(x)y = R(x)$ **:** *Zij $U$ een open interval waarover de functies $a$ en $R : U \to \mathbb{R}$ continu zijn. Dan worden de oplossingen over $U$ juist gegeven door*

$$e^{-\int a}\left(c + \int Re^{\int a}\right)$$

  *waarbij $c \in \mathbb{R}$ willekeurig is.*

- **Differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten :** *Is $a + ib$ een complex getal ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) dan definiëren we*

$$e^{a+ib} := e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

  *en*

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}.$$

- **Onbepaalde coëfficiënten :** *We bekijken de vergelijking*

$$y" + py' + qy = e^{ax}\big(C(x)\cos bx + S(x)\sin bx\big) \qquad (\star)$$

  *met $p, q, a, b \in \mathbb{R}, C(x)$ en $S(x)$ veeltermen met graad ten hoogste $N$.*

  1. *Is $a+ib$ geen wortel van de karakteristieke veelterm, dan heeft $(\star)$ een oplossing van de gedaante*

$$y(x) = e^{ax}\big(C_0(x)\cos bx + S_0(x)\sin bx\big).$$

  2. *Is $a + ib$ een enkelvoudige wortel van de karakteristieke veelterm, dan heeft $(\star)$ een oplossing van de gedaante*

$$y(x) = xe^{ax}\big(C_0(x)\cos bx + S_0(x)\sin bx\big)$$

  3. *Is $a + ib$ de dubbelwortel van de karakteristieke veelterm, dan is $a + ib = -p/2$ en vinden we een oplossing zoals in voorbeeld 12.4.2. Hierin zijn $C_0, S_0$ veeltermen met graad ten hoogste $N$.*