Oefeningenexamen Algebra I

Opgave 1. Zij G een groep met $Z(G) = 1$. Bewijs dat $Z(\mathrm{Aut}(G)) = 1$.

Uitwerking. Stel dat $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ en $g \in G$. Dan is

$$(x^g)^\alpha = (g^{-1}xg)^\alpha = (g^\alpha)^{-1}x^\alpha g^\alpha = (x^\alpha)^{g^\alpha}, \forall x \in G,$$

met andere woorden $\iota_g \alpha = \alpha \iota_{g^\alpha}$. (†)
Kies nu een $\alpha \in Z(\mathrm{Aut}(G))$ willekeurig. Er geldt voor alle $g \in G$ dat

$$\alpha \iota_g = \iota_g \alpha \overset{\dagger}{=} \alpha \iota_{g^\alpha} \implies \iota_g = \iota_{g^\alpha}.$$

Dit laatste wil zeggen dat $x^g = x^{g^\alpha}$ voor alle $x \in G$. Bijgevolg is $x^{gg^{-\alpha}} = x$ voor alle $x \in G$, dus $gg^{-\alpha} \in Z(G) = 1$. Bijgevolg is $g = g^\alpha$. Maar dit voor alle $g \in G$, zodat $\alpha = 1$.

Opgave 2. Toon aan dat geen enkelvoudige groep van orde $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ bestaat. Ga bijvoorbeeld als volgt te werk: stel dat G enkelvoudig is van orde 240.

(i) Toon aan dat G geen deelgroepen heeft van index $2, 3, 4$ of 5.
(ii) Toon aan dat G geen deelgroepen heeft van index 6.
(iii) Toon aan dat $N_G(P) \cong \mathbf{C}_{15}$, wanneer $P \in \mathrm{Syl}_5(G)$.
(iv) Toon aan dat $n_3(G) = 16$.
(v) Toon aan dat G juist 16 deelgroepen isomorf met $\mathbf{C}_{15}$ bevat, die twee aan twee triviaal snijden.
(vi) Leid hieruit een strijdigheid af.

Uitwerking. Stel dat G een enkelvoudige groep is van orde 240. Merk eerst op dat G geen deelgroepen heeft van index $i = 2, 3, 4$ of 5, anders zou de actie op de nevenklassen een injectie $G \to \mathbf{S}_i$ definiëren, maar $|G| > 5!$. Maar G heeft ook geen deelgroepen van index 6! Stel immers dat H zo'n deelgroep is, dan krijgen we een injectie $G \to \mathbf{S}_6$, met andere woorden '$G \leq \mathbf{S}_6$'. Maar $G \leq \mathbf{A}_6$ is onmogelijk, want dan zou $|G| = 240 \mid 360 = |\mathbf{A}_6|$. Maar dan moet $G\mathbf{A}_6 = \mathbf{S}_6$, zodat $[G : G \cap \mathbf{A}_6] = [\mathbf{S}_6 : \mathbf{A}_6] = 2$, zodat $G \cap \mathbf{A}_6 \lhd G$, strijdig.
We onderzoeken nu $n_5(G)$. Uit de stellingen van Sylow volgt dat $n_5(G) \in \{1, 6, 16\}$; 1 en 6 kunnen we schrappen omwille van bovenstaande overwegingen, zodat $n_5(G) = 16$. Kies nu een willekeurige Sylow-5-deelgroep $P < G$ en beschouw $N = N_G(P)$. Vermits $|N| = 15$, bevat N ook een Sylow-3-deelgroep Q van G, met de stellingen van Sylow zien we eenvoudig dat $Q \lhd N$. Daarnaast is $Q \cap P = 1$, zodat $[P, Q] = 1$ en $N \cong \mathbf{C}_{15}$.
Bijgevolg moet $N \subseteq N_G(Q)$, dus $|N| \mid |N_G(Q)|$, zodat $n_3(G) \mid [G : N] = 16$. Met de stelling van Sylow en bovenstaande overwegingen vinden we dus dat $n_3(G) = 16$.
Hieruit volgt dat de Sylow-3-deelgroepen en de Sylow-5-deelgroepen twee-aan-twee samen in een deelgroep van orde 15 zitten (namelijk hun normalisator) en dat deze deelgroepen twee aan twee triviaal snijden. We vinden dus 16 triviaal snijdende groepen van orde 15, samen goed voor $16 \cdot 14 = 224$ elementen van orde 3, 5 of 15. Dan zijn er nog 16 elementen over die noodzakelijk de Sylow-2-deelgroep moeten uitmaken, die dan uniek is en daarom een normaaldeler, een strijdigheid.

Opgave 3. Een ring wordt *Artins* genoemd als elke dalende keten idealen stabiliseert.

(a) Toon aan dat een quotiënt van een Artinse ring zelf Artins is.
(b) Toon aan dat elk Artins domein een veld is.
(c) Zij R een Artinse ring waarvan de doorsnijding van alle priemidealen triviaal is. Toon aan dat een eindig aantal priemidealen $P_1, \ldots, P_r$ bestaan waarvan de doorsnede triviaal is.
(d) Zij R een Artinse ring zoals in (c), bewijs dat R een direct product is van velden.

Uitwerking.

(a) Stel dat R Artins is, $I \lhd R$ en $\bar{R} = R/I$. Kies een dalende keten idealen in R/I:

$$\bar{I}_1 \supseteq \bar{I}_2 \supseteq \ldots$$

Met telkens $\bar{I}_i \lhd R_i$. Dan bestaan er idealen $I_i \lhd R_i$ zodat $\bar{I}_i = I_i/I$ en zodat

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$$

een dalende keten idealen is in R. Deze keten stabiliseert, en dus ook de keten $\bar{I}_i$.

(b) Kies een willekeurige $a \in R$. Dan geldt dat

$$(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \ldots$$

een dalende keten is. Deze keten stabiliseert, dus op zeker ogenblik hebben we dat $(a^i) = (a^{i+1})$; zodat $ra^{i+1} = a^i$ voor zekere r. Dit kunnen we schrijven als $a^i(1 - ra) = 0$ en omdat R een domein is, wil dit zeggen dat $a = 0$ of $ra = 1$. Dus als $a \neq 0$, is a inverteerbaar. Dus R is een veld.

(c) Stel dat $\{P_i \mid i \in X\}$ de verzameling priemidealen is, met $\bigcap_{i\in X} P_i = 0$ en waarbij X een zekere indexverzameling is. (Merk op dat X niet noodzakelijk aftelbaar is.) We bewijzen nu het volgende: als elke eindige deelverzameling idealen een niet-triviale doorsnede heeft, is de ring niet Artins.
Indien dus $\bigcap_{i\in X} P_i = 0$ en elke eindige deelverzameling idealen heeft een niet-triviale doorsnede, dan construeren nu een oneindig dalende keten als volgt. Kies $P_1 = R$. Als we $P_1, \ldots, P_s$ reeds gekozen hebben definieer dan $P := \bigcap_{j=1}^{s} P_j$. Nu bestaat er een $x \in X$ waarvoor $P_x \cap P \neq P$. (Anders zou voor elke x gelden dat $P_x \supseteq P$, maar dat kan niet, want dan zit P in de doorsnede van alle P_x'en, die triviaal is.) Kies dus zo'n P_x met die eigenschap en definieer $P_{i+1} := P_x$. Zo krijgen we een strikt dalende keten:

$$P_1 \supsetneq P_1 \cap P_2 \supsetneq P_1 \cap P_2 \cap P_3 \supsetneq \ldots$$

dus de ring is niet Artins.
Dus er volgt: als de ring wél artins is, dan moet een eindige deelverzameling idealen bestaan, die triviale doorsnede heeft.

(d) Stel dat $P_1, \dots, P_n$ priemidealen zijn waarvoor $P_1 \cap \cdots \cap P_n = 0$. (Deze bestaan omwille van (c).) Dan geldt omwille van (a) dat R/P_i Artins is, en omdat P_x priem is, is dit een Artins domein. Omwille van (b) geldt dan dat $R/P_i =: k_i$ een veld is, zodat het ideaal P_i maximaal is. Voor $x \neq y$, $x, y \in X$ geldt dan dat $P_x + P_y = R$, dus de Chinese reststelling is van toepassing en

$$R/\cap_{i=1}^n P_i \cong R/P_1 \times \cdots \times R/P_n.$$

Maar $\bigcap_{i=1}^n P_i = 0$ en $R/P_i = k_i$ is een veld, dus

$$R \cong k_1 \times \cdots \times k_n.$$

Opgave 4. Zij R een commutatieve ring en M een vrij R-moduul van rang n.

(a) Stel dat $y_1, \ldots, y_n$ een voortbrengend stel is voor M. Toon aan dat de y_i lineair onafhankelijk zijn.

(b) Stel dat $\phi : M \to M$ een morfisme van R-modulen is.

  (i) Toon aan: ϕ is een surjectie $\iff$ ϕ is een bijectie.

  (ii) Geef een tegenvoorbeeld: ϕ is een injectie $\iff$ ϕ is een bijectie.

Uitwerking.

(a) Kies een basis $x_1, \ldots, x_n$. Noteren we met X de kolomvector $(x_1, \ldots, x_n)^t$ en analoog voor Y, dan hebben we de uitdrukkingen $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ of dus $Y = AX$ en analoog $X = BY$, vermits zowel X als Y voortbrengend zijn.
Merk nu op dat X een basis is, dit wil zeggen dat als $UX = VX$, dat dan $U = V$: elk element kan *uniek* worden uitgedrukt als lineaire combinatie van de voortbrengers. We kunnen dit toepassen op $1X = X = BY = BAX$, waarbij 1 de $n \times n$-eenheidsmatrix is en we vinden dat $1 = BA$, dus $B = A^{-1}$.
Als we nu een linaire combinatie $\sum_i r_i y_i = 0$ hebben, dus $RY = 0$, met R een rij-matrix, dan is $RAX = 0 = 0X$, dus $RA = 0$, waaruit $R = RAA^{-1} = 0$.

(b) (i) Stel dat de x_i een basis vormen voor M, dan is $y_i := \phi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$ een voortbrengend stel voor M, vermits φ surjectief is. Namelijk kies $y \in M$ willekeurig, schrijf $y = \phi(x)$, schrijf $x = \sum_i c_i x_i$ en dan is $y = \phi(x) = \sum_i c_i \phi(x_i) = \sum_i c_i y_i$. Dus de y_i zijn voortbrengend en uit deel (a) volgt dan dat de y_i ook een basis zijn.
Als we nu hebben dat $\phi(x) = 0$, dan schrijven we $x = \sum_i c_i x_i$ en dan is $\phi(x) = \sum_i c_i y_i = 0$, dus $c_i = 0$ voor alle i, dus $x = 0$. Dus $\ker \phi = 0$ en bijgevolg is ϕ een isomorfisme.

  (ii) Beschouw het morfisme van $\mathbb{Z}$-modulen: $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 2x$. Dit is duidelijk injectief maar niet surjectief.