Examen Analyse 2 : Theorie (zonder Maple). (13 januari 2015)

1. Taylorreeksen.

Bewijs de volgende stelling, waarbij I een interval in $\mathbb{R}$ voorstelt:

Stel : $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, $a \in I$

Als : $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(|D^n f(x)| \leq K)$

Dan : $(\forall x \in I)(f(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^i}{i!} D^i f(a))$

De formules van Taylor met de sluittermen van Lagrange en van Cauchy mogen daarbij als bekend aangenomen worden.

2. Stuksgewijs continue en stuksgewijs gladde functies.

Zij $[a, b]$ met $a < b$ een gesloten interval in $\mathbb{R}$ en zij f een functie gedefinieerd op $[a, b]$ en met waarden in $\mathbb{R}$. Wanneer heet f stuksgewijs continu? En wanneer heet f stuksgewijs glad?

3. Lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde

We herinneren eraan dat een lineaire DV van 1^e orde de volgende algemene vorm heeft:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

met P en Q continue functies die gedefinieerd zijn over een gemeenschappelijk interval.

Geef de algemene oplossing van een dergelijke differentiaalvergelijking.

4. De Laplace transformatie.

(a) Geef de Laplace getransformeerden van de volgende functies en zeg voor welke waarden van s deze Laplacegetransformeerden gedefinieerd zijn:
1. $e^{ax}, a \in \mathbb{R}$.
2. $x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
3. $\sin(bx), b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

(b) Geef de inverse Laplacegetransformeerden van de volgende functies:
1. $\frac{s}{s^2+b^2}, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$
2. $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

(c) Geef met bewijs de formule voor de Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}[y^{(n)}(x)](s)$ voor een functie $y(x)$ die voldoende afleidbaar is en die samen met een voldoende aantal afgeleiden van exponentiële orde is.

Gent, 13 januari 2015

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen. (13 januari 2015) Reeks 1.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Vereenvoudig de door Maple bekomen resultaten altijd zoveel mogelijk.

1. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door

$$f(x) = 3 - x, \forall x \in [0, 3]$$

a. Geef de bijbehorende Fouriercosinusreeks met hoofdperiode 6.
b. Geef afzonderlijk de coëfficiënten van de reeksontwikkeling met even en met oneven index.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[0, 3]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

2. Een dubbelintegraal.

Zij S een regelmatige zeshoek met zijde gelijk aan 1. Bereken de dubbelintegraal over S van het kwadraat van de afstand tot het middelpunt van S.

3. Differentiaalvergelijkingen

Bschouw de differentiaalvergelijking

$$y' = y^3$$

A. Beantwoord de volgende vragen en motiveer uw antwoord:

1. Is dit een gewone of een partiële differentiaalvergelijking?
2. Van welke orde is deze differentiaalvergelijking?
3. Is dit een normale differentiaalvergelijking?
4. Is dit een lineaire differentiaalvergelijking?
5. Wat kunt u met zekerheid zeggen over het bestaan en/of de enigheid van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking als de bijkomende eis opgelegd wordt dat $y(x_0) = y_0$ voor gegeven $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$? Wat kunt u met zekerheid zeggen over hun definitiegebied (als de oplossingen bestaan)?

B. Gebruik de methode van de scheiding der veranderlijken om de oplossing(en) van de differentiaalvergelijking te vinden die voldoen aan $y(1) = 1$ en geef het definitiegebied van deze oplossing(en).

Gent, 13 januari 2015

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen. (13 januari 2015) Reeks 2.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple! Vereenvoudig de in Maple bekomen oplossingen altijd zoveel mogelijk.

1. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x+4, & \forall x \in [-2,-1] \\ &= -2x, & \forall x \in]-1,0[\\ &= 0 & \forall x \in [0,2[\end{aligned}$$

a. Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
b. Geef afzonderlijk de coëfficiënten van de reeksontwikkeling met even en oneven index.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[0,2]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

2. Een dubbelintegraal.

Zij S een regelmatige zeshoek met zijde gelijk aan 1. Bereken de dubbelintegraal over S van het kwadraat van de afstand tot het middelpunt van S.

3. Differentiaalvergelijkingen

Bschouw de differentiaalvergelijking

$$y' = \sqrt{y}$$

A. Beantwoord de volgende vragen en motiveer uw antwoord:

1. Is dit een gewone of een partiële differentiaalvergelijking?
2. Van welke orde is deze differentiaalvergelijking?
3. Is dit een normale differentiaalvergelijking?
4. Is dit een lineaire differentiaalvergelijking?
5. Wat kunt u met zekerheid zeggen over het bestaan en/of de enigheid van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking als de bijkomende eis opgelegd wordt dat $y(x_0) = y_0$ voor gegeven $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$? Wat kunt u met zekerheid zeggen over hun definitiegebied (als de oplossingen bestaan)?

B. Gebruik de methode van de scheiding der veranderlijken om de oplossing(en) van de differentiaalvergelijking te vinden die voldoen aan $y(1) = 1$ en geef het definitiegebied van deze oplossing(en).

Gent, 13 januari 2015

Prof. W. Govaerts