Discrete Wiskunde I: oefeningen

28 januari 2015, 8:30

"Would you tell me, please, which way I ought to go from here?"
"That depends a good deal on where you want to get to," said the Cat.
"I don't much care where –" said Alice.
"Then it doesn't matter which way you go," said the Cat.

Alice and *The Cheshire Cat* in *Alice's Adventures in Wonderland.*

1. De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wordt recursief gedefinieerd door de recurrente betrekking

$$a_n = \lambda_1 a_{n-1} - 2r^3 a_{n-2} + \lambda_3 a_{n-3} + 2r^{n+1} \text{ voor } n \geq 3$$

en de vrijheidsgraden $a_0 = 1$, $a_1 = \lambda_1$ en $a_2 = \lambda_1^2$, met $\lambda_1, \lambda_3, r \in \mathbb{R}$. Geef een voortbrengende functie van deze rij van de vorm $\frac{f(x)}{g(x)}$ met $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

2. We beschouwen rijen met open en gesloten haakjes. Zo een rij is correct als bij ieder open haakje verderop in de rij een uniek gesloten haakje te vinden is, met andere woorden als deze rij haakjes kan gezien worden als een correcte wiskundige uitdrukking waaruit de getallen en de operatiesymbolen verwijderd zijn. Nog anders gezegd, op ieder punt in de rij, moet het aantal open haakjes voor dit punt minstens het aantal gesloten haakjes voor dit punt zijn.

Toon aan dat het aantal correcte rijen met n paren haakjes gegeven wordt door $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Volgende fragmenten komen uit een mogelijk bewijs, en mag je dus gebruiken. Ze staan niet noodzakelijk in de goede volgorde. Zorg voor een helder en duidelijk bewijs: je hebt nog meer argumenten nodig dan er hier staan.

- "Als een rij van haakjes niet aan de voorwaarden voldoet (*slechte* rij), is er een positie ..., te vinden waarop het aantal gesloten haakjes voor het eerst het aantal open haakjes overschrijdt."
- "Nu is het duidelijk dat $g \circ f$ de identieke afbeelding op de slechte rijen bepaalt en dat $f \circ g$ de identieke afbeelding op de alternatieve rijen bepaalt. Bijgevolg zijn f en g bijecties."
- $$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \cdots = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$
- "We noemen een rij met $n-1$ open haakjes en $n+1$ gesloten haakjes een *alternatieve* rij."
- "... in deze alternatieve rij r alle open haakjes op posities $2k+2, \ldots, 2n$ te vervangen door gesloten haakjes ..."

3. Beschouw het volgende stelsel:

$$\begin{cases} 2X^2 + 13XY + 2Y^2 \equiv 26 & \pmod{51} \\ 3X + 20Y \equiv 36 & \pmod{119} \\ X^9 - Y^9 - 3X^2Y + 3XY^2 \equiv 7^{10^{10}} & \pmod{21} \end{cases}.$$

Bepaal voor een $m \in \mathbb{N}^*$, het aantal oplossingen in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$.

4. (Naar aanleiding van de herdenking van WO I). Bij het uitbreken van de oorlog heeft commandant B.I. Natoric het bevel over de vijfduizend manschappen van het vijfde leger. Het vijfde leger bestaat uit 7 divisies van elk 500 infanteristen, 3 pelotons van 150 cyclisten, 5 artilleriebrigades van 200 man elk, en een cavalerie-eenheid. Om een positie aan een brug in te nemen wil hij een bataljon van 500 soldaten vooruit sturen. Dit bataljon moet bestaan uit 100 à 150 cyclisten, 250 à 350 infanteristen, 50 à 75 artilleristen en minstens 25 cavaleristen. Op hoeveel verschillende manieren (aantal soldaten van elk type) kan het bataljon samengesteld zijn (een mogelijke samenstelling is dus '130 cyclisten, 270 infanteristen, 60 artilleristen en 40 cavaleristen')?