Lineaire Algebra en Meetkunde II

Modeltraject Eerste Bachelor Wiskunde

Tweede semester

Donderdag 11 juni 2015

Vraag 1 (/5 ptn)

Een *semiaffiene ruimte* $\mathscr{S} = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$ bestaat uit een verzameling $\mathscr{P}$ waarvan de elementen *punten* genoemd worden, en een familie $\mathscr{L}$ van deelverzamelingen van $\mathscr{P}$ waarvan de elementen *rechten* of *lijnen* genoemd worden, waarvoor de volgende verbindingsaxioma's gelden.

(SR1) Elk paar verschillende punten is bevat in een unieke rechte.

(SR2) **(Nul-één-alle Axioma)** Gegeven twee disjuncte rechten $R_1, R_2 \in \mathscr{L}$ en een punt $x \notin R_1 \cup R_2$, dan snijdt ofwel geen enkele, ofwel juist één, ofwel elke rechte door x die één van R_1, R_2 snijdt, ook de andere.

(SR3) Er zijn drie punten die niet bevat zijn in een gemeenschappelijke rechte.

Onderstel dat de semiaffiene ruimte $\mathscr{S} = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$, waarin elke rechte ten minste drie punten heeft, bovendien voldoet aan

(SR4) Voor elke rechte R en elk punt $x \notin R$ bestaat ten minste één rechte R' door x en disjunct met R, ten minste één punt $y \notin R \cup R'$, en ten minste twee rechten door y die $R \cup R'$ in twee punten snijden.

Dan kan men bewijzen dat deze een planaire ruimte is waarin elk vlak een affien vlak is. Voeren we eerst volgende definitie is:

Zij R_1 en R_2 twee rechten en x een punt. Dan noemen we R_1 en R_2 *in perspectief (vanuit x)*, en x een *centrum van de perspectiviteit (tussen R_1 en R_2)*, indien $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ en er ten minste twee rechten door x bestaan die $R_1 \cup R_2$ in twee punten snijden.

Dan kan men achtereenvolgens de volgende vier stellingen bewijzen:

STELLING 1.
Zij R_1 en R_2 twee rechten in perspectief vanuit p. Zij R een rechte in perspectief met R_1 vanuit p. Dan is ook R_2 in perspectief met R vanuit p.

STELLING 2.
Zij R_1 en R_2 twee rechten in perspectief vanuit het punt x. Zij R een rechte door x die $R_1 \cup R_2$ in twee punten snijdt. Dan is elk punt van $R \setminus (R_1 \cup R_2)$ een centrum van perspectiviteit tussen R_1 en R_2.

STELLING 3.
Zij R_1 en R_2 twee rechten in perspectief. Dan bevat elke rechte L die $R_1 \cup R_2$ in twee punten snijdt een centrum van perspectiviteit.

STELLING 4.
Zij R_1 en R_2 twee snijdende rechten. Dan gaat door elk punt van $R_2 \setminus R_1$ een unieke rechte in perspectief met R_1 en de unie V van al deze rechten met R_1 is een deelruimte die de structuur van een affien vlak heeft.

Bewijs ofwel STELLING 1, ofwel STELLINGEN 2 en 3, ofwel STELLING 4 (waarbij je telkens mag steunen op de voorgaande stellingen uiteraard).

Vraag 2 (/5 ptn)

Stelling v. Desargues

Bespreek hoe een verschuiving, die een gegeven punt a op een gegeven punt b afbeeldt, geconstrueerd wordt in een axiomatische affiene ruimte van dimensie ten minste 3. Je hoeft niets in detail te bewijzen, maar je dient de opbouw goed te ondersteunen met argumenten.

Vraag 3 (/5 ptn)

Bewijs dat een σ-sesquilineaire vorm f met $\sigma^2 = 1$ reflexief is als en slechts als er een element $k \in \mathbb{K}$ bestaat met $kk^\sigma = 1$ en $f(v,w) = kf(w,v)^\sigma$, voor alle $v,w \in V$. Indien f niet alternerend is, dan is k gelijk aan $f(x,x)/f(x,x)^\sigma$, voor zekere $x \in V$ met $f(x,x) \neq 0$.

Leid daaruit af dat een bilineaire vorm reflexief is als en slechts als hij ofwel alternerend ofwel symmetrisch is. Leid daar ook uit af dat elke reflexieve σ-sesquilineaire vorm, met $\sigma \neq 1$, proportioneel is aan een hermitische vorm.

Vraag 4 (/5 ptn)

Bewijs de Stelling van Pascal met behulp van kegelsnedenbundels. Zij dus $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ zes verschillende punten op een niet-ontaarde kegelsnede $\mathcal{K}$, cyclisch geordend. Dan zijn de snijpunten $q_2 = \langle p_0, p_1 \rangle \cap \langle p_3, p_4 \rangle$, $q_0 = \langle p_1, p_2 \rangle \cap \langle p_4, p_5 \rangle$ en $q_1 = \langle p_2, p_3 \rangle \cap \langle p_5, p_0 \rangle$ collineair. Sommige van deze punten mogen eventueel op oneindig liggen, waarbij, indien p_0 op oneindig ligt, $\langle p_0, p_1 \rangle$ dient gelezen te worden als de rechte door p_1 met richting p_0; indien ook p_1 op oneindig ligt, dan is $\langle p_0, p_1 \rangle$ de rechte op oneindig.

Lineaire Algebra en Meetkunde II — 11 juni 2015

Opgave 1. Zij $\mathcal{A}$ een 4-dimensionale affiene ruimte, zij π een vlak en L een rechte. We definiëren $D = \langle \pi, L \rangle$ en zij verder

deelruimte voortgebracht d. π & L

$$X = \bigcup_{\substack{p \in \pi \\ p \neq q}} \bigcup_{q \in L} \langle p, q \rangle.$$

(i) Toon aan dat $X \subseteq D$.

(ii) Toon in detail aan dat één van volgende mogelijkheden zich voordoet.

(A) $D = \mathcal{A}$.

(B) $\pi \cap L = \varnothing$, $\dim D = 3$.

(C) $\pi \cap L$ is een punt.

(D) $\pi \cap L$ is een rechte.

unie/doorsnijding deelruimten

(iii) Geef in elk van deze gevallen een meetkundige beschrijving van de verzameling $D \setminus X$.

Opgave 2. Zij k een veld met karakteristiek $\neq 2$.

(i) Beschouw de vectorruimte k^2 met niet-ontaarde kwadratische vormen gegeven ten opzichte van de standaardbasis door

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ en } H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(Met $a \in k$, $b \in k^\times$.) Toon aan dat (k^2, B) en (k^2, H) isometrisch zijn.

Zij nu (V, q) een vectorruimte van dimensie $n > 1$ met niet-ontaarde kwadratische vorm q. Beschouw volgende uitspraken:

(A) Er bestaat een isotrope vector.

isometrisch

(B) Er bestaat deelruimte U zodat $(U, q|_U) \overset{q}{\cong} (k^2, H)$.

(C) De afbeelding $q : V \to k$ is surjectief.

(ii) Toon aan dat A $\Longleftrightarrow$ B.

(iii) Bewijs B $\Longrightarrow$ C

(iv) Geef een tegenvoorbeeld voor C $\Longrightarrow$ A.

Opgave 3.

(i) Toon aan dat de kegelsneden van de vorm

$$cXY + aYZ + bZX = 0 \text{ met } a + b + c = 0$$

een bundel vormen.

(ii) Bepaal de ontaarde exemplaren.

(iii) Bewijs dat de middelpunten van die exemplaren waarvoor $a, b > 0$ een open lijnstuk $]p, q[$ bepalen; bepaal ook de punten p en q.