# Statistische Fysica 1: 19 januari 2015

## THEORIE (30 punten van de 50)

- **VRAAG 1 (12 PUNTEN)**

  1. Toon aan hoe de partitiefunctie voor een klassiek en ideaal gas kan uitgebreid worden wanneer interacties $U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ tussen de deeltjes in rekening worden gebracht. Introduceer en definieer hierbij de configurationele partitiefunctie.
  2. Een twee-deeltjes correlatiefunctie voor een systeem van $N$ deeltjes wordt gedefinieerd door middel van een uitdrukking van het type

  $$g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \left(\frac{V}{N}\right)^2 \frac{N!}{(N-2)!} \times \frac{\int d\vec{r}_3 \int d\vec{r}_4 \ldots \int d\vec{r}_N \exp\left[-\beta \sum_{i<j} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\right]}{\int d\vec{r}_1 \ldots \int d\vec{r}_n \int d\vec{r}_{n+1} \int d\vec{r}_{n+2} \ldots \int d\vec{r}_N \exp\left[-\beta \sum_{i<j} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\right]} .$$

     - Welke fysische informatie geeft de grootheid $g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$?
     - Toon aan dat voor een twee-deeltjes observabele $h$ steeds geldt dat

  $$\overline{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{V}\right)^2 \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \;\; g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) h(\vec{r}_1, \vec{r}_2) .$$

  3. Bewijs de drukvergelijking

  $$\frac{P}{\rho k T} = 1 - \frac{\rho}{6kT} \int_0^{+\infty} dr_{12} \, \frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} \, g^{(2)}(r_{12}, \rho, T) 4\pi r_{12}^3 .$$

- **VRAAG 2 (8 PUNTEN)** Om de toestandsvergelijking van een niet-relativistisch en ideaal Fermi-Dirac gas voor een systeem met spin $S$ deeltjes af te leiden, wordt gestart van een redenering van het type

$$\begin{aligned}
\Phi(T, V, \mu) &= -kT \ln \mathcal{Z}(T, V, \mu) \\
&= -kT \sum_p \ln \mathcal{Z}_p^{FD} \\
&= -kT \sum_p \ln \left(1 + z e^{\frac{-\beta p^2}{2m}}\right) \\
&= -kT(2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln\left(1 + z e^{\frac{-\beta p^2}{2m}}\right) , \qquad (1)
\end{aligned}$$

met

$$z \equiv e^{\beta\mu} . \qquad (2)$$

- Specifieer de grootheden $\Phi, \mu, z$ en $\mathcal{Z}$ die in bovenstaande uitdrukkingen voorkomen en verduidelijk bondig hun rol in de opbouw van de statistische fysica.
- Verantwoord en becommentariëer de verschillende stappen die in de bovenstaande formule (**??**) werden doorgevoerd.
- Leid op basis van het bovenstaande een formule af die de gemiddelde druk $P$ bepaalt in een Fermi-Dirac gas. Hoe moet de formule bekomen voor $P$ aangepast worden wanneer men te doen heeft met een relativistisch Fermi-Dirac gas?

• **VRAAG 3 (10 PUNTEN)** Beschouw een systeem van $N$ magnetische dipolen $\vec{\mu}$ van spin $\frac{1}{2}$ deeltjes die in een extern magnetisch veld $\vec{\mathcal{B}}$ worden geplaatst. We veronderstellen dat de verschillende magnetische dipolen met elkaar interageren via een dichtste-nabuur interactie met sterkte $J_0$ (Ising systeem).

- Leid de algemene partitiefunctie af voor dergelijk systeem.
- Toon nu aan dat in het één-dimensionale geval deze partitiefunctie zich herleidt tot

$$Z(T, \mathcal{B}, N) = \sum_{\sigma_1^z=\pm 1} \sum_{\sigma_2^z=\pm 1} \ldots \sum_{\sigma_N^z=\pm 1} \left\langle \sigma_1^z \left| \widehat{P} \right| \sigma_2^z \right\rangle \left\langle \sigma_2^z \left| \widehat{P} \right| \sigma_3^z \right\rangle \ldots \left\langle \sigma_N^z \left| \widehat{P} \right| \sigma_1^z \right\rangle \ , \tag{3}$$

  en bepaal een uitdrukking voor $\widehat{P}$.
- Leid een uitdrukking af voor de partitiefunctie van het Ising systeem in de gemiddeld-veld benadering.
- DEFINEER de spin-spin correlatiefunctie $G(r)$ in een Ising systeem en beschrijf kort zijn fysische betekenis. Definieer in dit verband ook het concept "correlatielengte".

# Statistische Fysica 1: 19 januari 2015

**OEFENINGEN (20 punten van de 50)** BIJ HET OPLOSSEN VAN DE OEFENINGEN KUN JE JE CURSUS GEBRUIKEN! HET IS NIET TOEGELATEN OM GEBRUIK TE MAKEN VAN ANDERE HULPMIDDELEN ZOALS BIJVOORBEELD SETS VAN OPGELOSTE OEFENINGEN.

## OEFENING 1 (12 PUNTEN): BOSE MAGNETISME

Beschouw een gas van spin-1 deeltjes met massa $m$ die bewegen in een volume $V$. Elk van de deeltjes is onderheving aan een hamiltoniaan van het type

$$H^{(1)} = \frac{p^2}{2m} - \mu_B s_z \mathcal{B} \ ,$$

waarbij $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ en $s_z \in \{-1, 0, +1\}$

- Bereken het gemiddeld aantal bosonen $\left(\overline{N}_-, \overline{N}_0, \overline{N}_+\right)$ in elk van de drie spintoestanden.

- Bereken het totaal magnetisch moment $\mathcal{M}(z, T, \mathcal{B})$ van het systeem als functie van de fugaciteit $z$, de sterkte van het magnetisch veld $\mathcal{B}$ en de temperatuur $T$.

- Bereken de zogenaamde "zero-field susceptibility" $\chi_{\mathcal{B}\to 0}$

  $$\chi_{\mathcal{B}\to 0} = \frac{\mu_0}{V} \left( \frac{\partial \mathcal{M}(z, T, \mathcal{B})}{\partial \mathcal{B}} \right)_{\mathcal{B}\to 0} \ ,$$

  door $\mathcal{M}(z, T, \mathcal{B})$ te ontwikkelen in machten van $\mathcal{B}$.

- Bepaal een uitdrukking voor de "zero-field susceptibility" $\chi_{\mathcal{B}\to 0}$ als functie van de dichtheid $\rho = \frac{N}{V}$, $T$ en $\mathcal{B}$. Je kunt dit doen door de fugaciteit $z$ te ontwikkelen in termen van de dichtheid (termen tot op orde $\rho^2$ overhouden) bij condities van voldoende grote temperatuur $T$.

- Bereken de $\chi_{\mathcal{B}\to 0}$ in de klassieke limiet. Wat is de eerste-orde kwantummechanische correctie op dit resultaat? In hoeverre vind je Curie's wet terug? Is dit een logisch resultaat?

- Bepaal de kritische temperatuur $T_c\,(\rho, \mathcal{B} = 0)$ van het Bose gas. Welk gedrag vertoont

  $$\lim_{T \to T_c^+} \chi_{\mathcal{B}\to 0} \ ?$$

  ($T$ nadert naar $T_c$ vanuit hoge-temperatuur condities).

- Vertoont het systeem onder studie "spontane magnetizatie" voor $T < T_c$? Verklaar je antwoord.

## OEFENING 2 (8 PUNTEN)

- Beschouw een gas van $N$ massieve deeltjes met massa $m \neq 0$ en spin $S = \frac{3}{2}$ die zich in een drie-dimensionaal volume $V$ bevinden. Het systeem is in contact met een warmtebad op temperatuur $T$. De Hamiltoniaan van het $N$-deeltjes systeem wordt gegeven door

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_i}{2m} \ .$$

1. Bereken de entropie $S\,(T, V, z = \exp\beta\mu)$ van het gas onder de meest algemene condities van temperatuur en dichtheid.
2. Voldoet je bekomen uitdrukking voor $S\,(T, V, z = \exp\beta\mu)$ aan de juiste voorwaarden voor $T \to 0$?
3. Bereken de entropie $S_k(T, V, N)$ van het beschouwde systeem in de "klassieke" fysische omstandigheden waarvoor $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mkT}} << \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ en $Z(N, T, V) \approx \frac{1}{N!}\left[Z_1(T, V)\right]^N$.
4. Toon aan dat je uitdrukking voor $S_k(T, V, N)$ compatibel is met de uitdrukking die je bekomt voor $S\,(T, V, z = \exp\beta\mu)$ onder punt 1).
5. Bereken de eerste-orde kwantummechanische correctie op $S_k(T, V, N)$. Werken de kwantumcorrecties "entropie-verlagend" of "entropie-verhogend"? Verklaar je antwoord.