1ste Ba Wiskunde – 5.6.2015

Analyse II

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgave.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Deel A

Vraag I.

1. Definieer (i) open verzameling; (ii) compacte verzameling; (iii) gebied; (iv) afleidbaarheid voor functies van twee veranderlijken.
2. Formuleer (geen bewijs) de 'stelling van Bolzano-Weierstrass'.
3. Onderstel dat $f(x,y)$ van de klasse C^2 over $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ is, en stel $g(\theta, r) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Bereken

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Het resultaat mag enkel afgeleiden van g naar r en θ bevatten.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag II.

1. Geef de formules (geen uitleg) voor (i) $a(\omega)$; (ii) $b(\omega)$; (iii) Δ_λ; (iv) de Fouriergetransformeerde.
2. Formuleer (geen bewijs) de 'Oneigenlijke hulpstelling van Riemann' en de 'Hulpstelling van Riemann voor integreerbare afbeeldingen op een eindig interval'.
3. Bewijs dat

$$s_\lambda(x) = \int_0^\lambda (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)\,d\omega$$

kan omgevormd worden tot een oneigenlijke integraal met Δ_λ in het integrandum als $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-continu is en $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ convergeert.

4. Bewijs de formule $e^{-x} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega \quad (x \geq 0)$.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag III.

1. Formuleer (geen bewijs) de 'stelling van Stokes'.
2. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos x + \sin 2x}{x} + |x|^{5/2} e^{-|x|} + x^5 \right) dx$.
3. Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):
   (a) Als $f: K \to \mathbb{R}$ continu is op de compacte verzameling $K \subset \mathbb{R}^2$, dan is $f(K)$ een compact interval.
   (b) Als $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afleidbaar is en f' begrensd is op $\mathbb{R}$, dan is f Lipschitzcontinu.
   (c) Als f van klasse C^1 is in een open verzameling $G \subseteq \mathbb{R}^2$ die gaten mag hebben, dan is $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ voor elke gesloten stuksgewijze gladde kromme Γ binnen G.

NIEUW DUBBEL BLAD

(*vervolgt met DEEL B*)

Deel B

1. (a) Definieer 'meetbare afbeelding' (op een meetbare deelverzameling van een maatruimte).
   (b) Definieer de integraal van een meetbare afbeelding met nietnegatieve waarden. Definieer hierbij ook de begrippen die je in deze definitie gebruikt.
2. (a) Definieer 'kritiek punt' en 'stabiel kritiek punt' van een autonome differentiaalvergelijking.
   (b) Als $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, toon dan aan dat 0 een stabiel kritiek punt is van $x' = Ax$ ~~als en slechts als~~ elke oplossing begrensd is op $[0, +\infty[$.
   (c) Als $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en 0 is een stabiel kritiek punt van $x' = Ax$, wat weet je dan over de eigenwaarden van A? Toon dit aan.
3. Beantwoord de vragen:

Stelling 1. *Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ en f een continue afbeelding $I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die lokaal gelijkmatig Lipschitz-continu is. Dan heeft het beginwaardenprobleem $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ een oplossing in I.*

Bewijs. Kies willekeurig $[a, b] \subseteq I$ met $t_0 \in [a, b]$. We definiëren $x_0(t) := x_0$ en $x_n(t)$ d.m.v. de iteratie

$$x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds. \tag{1}$$

Kies $t \in [a, b]$ vast met $t \geq t_0$ (het geval $t \leq t_0$ is analoog). Dan is

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \overset{[1]}{\leq} \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\|\, ds \leq \underbrace{\max_{s\in[a,b]} \|f(s, x_0)\|}_{[2]=:M\in\mathbb{R}}(t - t_0)$$

$$\begin{aligned}\|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))\|\, ds \\ &\overset{[3]}{\leq} C\int_{t_0}^{t} \|x_1(s) - x_0(s)\|\, ds \leq C\int_{t_0}^{t} M(s - t_0)\, ds \leq CM\frac{(t - t_0)^2}{2},\end{aligned}$$

en algemeen

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq C\int_{t_0}^{t} \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\|\, ds \leq C^n M \int_{t_0}^{t} \frac{(s - t_0)^n}{n!}\, dt \leq C^n M\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Vermits $x_n(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{n}(x_k(t) - x_{k-1}(t))$, is

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty}(x_n(t) - x_{n-1}(t)),$$

als de reeks in het rechterlid convergeert. Deze laatste reeks (en dus ook de rij $(x_n(t))_n$) convergeert gelijkmatig over $[a, b]$ naar een zekere functie $x(t)$ omdat ... [4]. Dan is ook $f(t, x_n(t)) \rightrightarrows f(t, x(t))$ op $[a, b]$, want

$$\sup_{t\in[a,b]} \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| \leq C \sup_{t\in[a,b]} \|x_n(t) - x(t)\| \to 0 \text{ als } n \to \infty [5].$$

Hierdoor is $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$ [6] op elk interval $[a, b] \subseteq I$, m.a.w. op heel I.
[7]

□

[1] Verklaar. Welke eigenschap pas je hier toe?
[2] Waarom bestaat $M \in \mathbb{R}$ met deze eigenschap? Leg uit.
[3,6] Verklaar.
[4] Vul aan. Formuleer de eigenschap die je hier toepast, leg uit hoe ze in dit concreet geval toegepast wordt, en waarom aan de voorwaarden voldaan is om haar te mogen toepassen.
[5] Hoe volgt hieruit dat $f(t, x_n(t)) \rightrightarrows f(t, x(t))$?
√ [7] Hoe volgt het gevraagde hieruit?

4. Beantwoord de vragen:

Eigenschap 2. *Elke oplossing $x(t)$ van $x' = x^2 - t^2$ met $x(t_0) \geq \sqrt{t_0^2 + 2}$ (voor zekere $t_0 \geq 0$) divergeert naar $+\infty$ in een eindige tijd.*

Bewijs. 1. De functie $y(t) := \sqrt{t^2+2}$ is een onderoplossing voor $t \geq 0$ [1]. Daardoor is $x(t) \geq \sqrt{t^2+2}$ voor $t \geq t_0$ [2]. Er volgt dat $x'(t) = (x(t))^2 - t^2 \geq 2$ voor $t \geq t_0$, en dus zelfs $x(t) \geq 2t + a$ voor $t \geq t_0$ (zekere $a \in \mathbb{R}$) [3].

2. $x(t)$ is een bovenoplossing van de vergelijking $x' = \frac{1}{2}x^2$ voor $t \geq t_1$ (zekere $t_1 \geq t_0$), want

$$x'(t) - \frac{(x(t))^2}{2} \to +\infty, \quad t \to +\infty.$$

3. Door scheiding van veranderlijken volgt dat de oplossingen van $x' = \frac{1}{2}x^2$ gegeven worden door $y(t) = \frac{1}{c - t/2}$. Bij de beginvoorwaarde $y(t_1) := t_1 (> 0)$ is bovendien $t_1 < 2c$ [4]. Er volgt dat $x(t) > \frac{1}{c-t/2}$ op heel $]t_1, 2c[$, zodat $x(t) \to +\infty$ als $t \to 2c-$ (of al eerder als $\sup J < 2c$, met J het bestaansinterval van $x(t)$)). □

[1] Definieer 'onderoplossing' en verklaar.
[2,3] Verklaar.
[4] Waarom is $t_1 < 2c$? Waarom hebben we nodig dat $t_1 < 2c$?

5. Gegeven is een homogeen lineair stelsel (met veranderlijke coëfficiënten) dat bestaat uit drie (scalaire) vergelijkingen van tweede orde. Kan je iets besluiten over de dimensie van de oplossingenruimte? Motiveer je antwoord. Als je gebruik maakt van eigenschappen uit de cursus, hoef je deze hier *niet* te bewijzen.

6. Heeft elke (scalaire) vergelijking $x''(t) = a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$ (met a_0, a_1 gedefinieerd en continu op heel $\mathbb{R}$) een

   (a) oplossing die een machtreeks is (op een nietleeg open interval)?
   (b) oplossing die op heel $\mathbb{R}$ gedefinieerd is?
   (c) oplossing zonder nulpunten? p. 52

Motiveer je antwoord. Als je gebruik maakt van eigenschappen uit de cursus, hoef je deze hier *niet* te bewijzen.

$x''(t) = a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$

~~stel~~ $x(t) = \varphi(t)y(t)$

1ste Ba Wiskunde

05.VI.15

Wiskundige Analyse II oefeningen

(i) *Schrijf* ***naam*** *en* ***richting*** *boven elk blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*
(iv) *Een tekening is niet verplicht.*
(v) *Bij parametervoorstellingen: schrijf op hoe u aan uw parametervoorstelling komt. U moet de kenmerkende eigenschappen van een parametervoorstelling niet nagaan.*
(vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1.

Bereken de oppervlakte van het gebied in het halfvlak $x \geq 0$ dat begrensd wordt door de vergelijkingen $x^2y - a_1 = 0, x^2y - a_2 = 0, y = b_1x^2$ en $y = b_2x^2$. Hier is $0 < a_1 < a_2$ en $0 < b_1 < b_2$.

Vraag 2.

Bereken het volume van het gebied bepaald door de ongelijkheden $x \geq |y|, x^2 + y^2 \leq 1$ en $|z| \leq x^3 + y^3$.

Vraag 3.

Zij Σ het deel van de paraboloïde $z = x^2 + y^2$ binnen de cilinder $x^2 + y^2 = 2y$. Bereken $\iint_\Sigma y\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}d\sigma$.

Vraag 4.

Bereken:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{(n+1)^2 \cos\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{n^2x^3} dx$$

De meetbaarheid van de functies en de intervallen hoeft niet aangetoond te worden.

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Tijd tot 18:00