Examen "Kwantummechanica 1": 12 januari 2015

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat!

1. THEORIE VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Een deeltje wordt gebonden in een één-dimensionale potentiaal $V(x)$ die de volgende eigenschap bezit $V(x) = V(-x)$. Noem $\psi_n(x)$ een oplossing van de corresponderende TISE met energie-eigenwaarde E_n.
     (a) toon aan dat ook $\psi_n(-x)$ een oplossing is van de TISE
     (b) gebruik dit resultaat om aan te tonen dat geldt

     $$\psi_n(x) = \psi_n(-x) \qquad \text{OF,} \qquad \psi_n(x) = -\psi_n(-x)$$

     (c) definieer het concept "pariteit" en breng het in relatie met wat je hierboven bekomen hebt
     (d) beschouw een deeltje met golffunctie $\Psi(x,t)$ dat beweegt in een potentiaal $V(x) = V(-x)$. Zijn de volgende gelijkheden altijd geldig?
       i. $\langle x \rangle = 0$
       ii. $\langle p_x \rangle = 0$

       Bewijs je antwoord.

   - Veronderstel dat de operatoren P en Q aan de volgende eigenschap voldoen

     $$[P, Q] = Q \ ,$$

     en dat ψ een eigenfunctie is van P met eigenwaarde p. Toon aan dat $Q\psi$ een eigenfunctie is van P en bepaal de corresponderende eigenwaarde.

2. THEORIE VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen “Kwantummechanica 1”: 12 januari 2015

OEFENINGEN (20 punten)

Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen ENKEL de cursusnota's (TRANSPARANTEN) en het handboek "Quantum Mechanics" van Bransden en Joachain gebruikt worden. Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.

Oefening 1 (10 punten)

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie in een potentiaal gegeven door:

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ +\infty\,, & x > \frac{a}{2} \quad \text{en,} \quad x < -\frac{a}{2}\,, \end{cases}$$

en wordt op het tijdstip $t = 0$ in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = \mathcal{C}\,(a + 2x)\,(a - 2x) \qquad \left(-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}\right)\,.$$

1. Bepaal de normeringsconstante $\mathcal{C}$.
2. Bepaal de golffunctie $\Psi(x,t)$ op een arbitrair tijdstip t.
3. Noem E_1 de grondtoestandsenergie. Wat is de waarschijnlijkheid om bij een meting van de energie op een arbitrair tijdstip t de waarde E_1 te vinden wanneer op $t = 0$ het deeltje zich bevindt in de hierboven gespecifieerde $\Psi(x, t = 0)$?
4. Bereken de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x,t)$ van het systeem. Op welke tijdsstippen t_1 geldt dat $P(x, t = t_1) = P(x, t = 0)$? Verklaar je antwoord.

OEFENING 2 (5 PUNTEN)

Beschouw een systeem dat beschreven wordt door middel van een Hamiltoniaan H. De Hamiltoniaan H heeft twee eigentoestanden (ψ_1, ψ_2) met corresponderende energie-eigenwaarden (E_1, E_2). Een willekeurige operator A heeft twee eigentoestanden (ξ_1, ξ_2) met corresponderende eigenwaarden (a_1, a_2).

De matrixrepresentatie van de operator A in de basis (ψ_1, ψ_2) heeft de volgende vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{a} \\ \mathrm{a} & 0 \end{pmatrix},$$

met a een reëel getal.

1. Bereken de verwachtingswaarde $\langle A \rangle$ van de operator A voor de meest algemene oplossing $\Psi(x,t)$ van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking voor het systeem. Bewijs dat de tijdsafhankelijkheid van $\langle A \rangle$ oscillatorisch is en bepaal de periode van de oscillatie.

2. Het systeem wordt op $t = 0$ in een toestand gebracht waarbij frequente metingen van de dynamische variabele A steeds de waarde a_1 opleveren.

   (a) Wat is voor deze toestand de verwachtingswaarde van de dynamische variabele A op een arbitrair tijdstip t?

   (b) Welke informatie heb je over de verwachtingswaarde van de energie voor deze toestand op een arbitrair tijdstip t?

OEFENING 3 (5 PUNTEN)

De onderstaande figuur toont 6 golffuncties $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_6(x))$ die oplossingen zijn van de één-dimensionale TISE. Je wordt gevraagd om voor elke u_i de corresponderende potentiaal te selecteren uit de zes getekende potentialen $(V_1(x), V_2(x), \ldots, V_6(x))$. **Je wordt ook verwacht om je keuzes te verantwoorden en telkens te vermelden of je te doen hebt met een gebonden toestand of een verstrooiingstoestand**. De spelregels zijn de volgende

1. de index n in $u_n(x)$ slaat hier NIET op de grondtoestand, eerste aangeslagen toestand, etc., maar is een dummy.

2. het is NIET zo dat je elke potentiaal maar één keer moet vermelden. Het is best mogelijk dat een welbepaalde potentiaal V_i aanleiding gaf tot verschillende golffuncties u_i (of anders gezegd, het is best mogelijk dat van bepaalde potentialen geen golffunctie u_i wordt getoond).