Oefeningenexamen Algebra I — 15 januari 2014

"*It looks insanely complicated, and this is one of the reasons why the snug plastic cover it fitted into has the words* Don't Panic *printed on it in large friendly letters.*"
— The Hitchhiker's Guide to the Galaxy

Opgave 1.

(a) Zij G een willekeurige groep en $A, B < G$ twee deelgroepen, strikt bevat in G. Verduidelijk de stappen met een sterretje uit volgend bewijs dat $G \neq A \cup B$.

> Kies $a \in A \setminus B$ en $b \in B \setminus A$, dan is $ab \in G = A \cup B$. Maar als $ab \in A$, dan is $b \in A$ [* waarom?], en als $ab \in B$, dan is $a \in B$; een strijdigheid [*waarom volstaat dit?].

(b) Als een groep G een quotiënt heeft, isomorf met $K_4 \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$, toon dan aan dat deze een unie is van drie eigenlijke deelgroepen.

(c) Als een groep $G = A \cup B \cup C$, met $A, B, C < G$, toon dan aan dat deze groep een quotiënt heeft dat isomorf is met $K_4 \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$. Ga bijvoorbeeld als volgt te werk:

- (i) Toon aan dat $\hat{A} := A \setminus (B \cup C) \neq \varnothing$.
- (ii) Toon aan dat $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$.
- (iii) Stel $D := A \cap B \cap C$. Toon aan dat $\hat{A}$ zowel een linkse als een rechtse nevenklasse van D is.
- (iv) Besluit dat $D \trianglelefteq G$ en dat $G/D \cong K_4$.

Opgave 2 Zij G een groep van orde $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Onderstel dat $n_3(G) = 1$, toon aan dat $G \cong \mathbf{C}_{315}$ of $G \cong \mathbf{C}_{105} \times \mathbf{C}_3$. Ga als volgt te werk.

- (i) Kies $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ en $Q \in \mathrm{Syl}_5(G)$. Beschouw de afbeelding $\alpha : Q \mapsto \mathrm{Aut(P)} : x \mapsto [u \mapsto u^x]$. Maak gebruik van $|\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_3 \times \mathbf{C}_3)| = 48$ en $|\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_9)| = 6$ om te bewijzen dat α triviaal is.
- (ii) Besluit hieruit dat $[Q, P] = 1$.
- (iii) Toon aan dat $P \leqslant N_G(Q)$ en besluit daaruit dat $n_5(G) = 1$.
- (iv) (*Dit hoef je niet te bewijzen!*) Analoog geldt dat $n_7(G) = 1$; kies $R \in \mathrm{Syl}_7(G)$.
- (v) Toon aan dat $G \cong P \times Q \times R$.
- (vi) Concludeer dat $G \cong \mathbf{C}_{315}$ of $G \cong \mathbf{C}_{105} \times \mathbf{C}_3$.

Vervolg op de ommezijde.

Opgave 3 Beschouw een eindige verzameling $\mathcal{S}$ met $|\mathcal{S}| \geqslant 1$. De ring R bestaat uit de functies $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ met puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging. (Dus $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ en $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$.)

(i) Toon aan: als $V \subseteq \mathcal{S}$, dan is de verzameling

$$I(V) = \{f \in R \mid \forall x \in V : f(x) = 0\}$$

een ideaal $I(V) \trianglelefteq R$.

(ii) Beschouw een willekeurig ideaal $J \trianglelefteq R$. Definieer

$$W = \{s \in \mathcal{S} \mid \forall f \in J : f(s) = 0\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Toon aan dat $J = I(W)$.

(iii) Toon aan: als $V, W \subseteq S$, dan geldt als $V \subseteq W \iff I(W) \subseteq I(V)$.

(iv) Beschrijf dan de maximale idealen $M \trianglelefteq R$ en de bijhorende quotiëntringen R/M.

Opgave 4 Beschouw een hoofdideaaldomein D en een eindig voortgebracht D-moduul M. Een deelmoduul $N \subseteq M$ wordt *puur* genoemd als voor elke $n \in N$ en $d \in D$ geldt:

$$\exists x \in M : dx = n \implies \exists x \in N : dx = n.$$

(i) Toon aan: als er een T bestaat zodat $M = N \oplus T$, dan is N een puur deelmoduul van M.

(ii) Toon aan: als M een vrij moduul is, en N een puur deelmoduul, dan bestaat er een T zodat $M = N \oplus T$. [Hint: Beschouw dan de inclusie $\iota : N \to M$. Dan heeft ι een Smith-normaalvorm (waarom?) waaruit volgt dat

$$M = z_1 D \oplus \cdots \oplus z_n D \text{ en } N = d_1 z_1 D \oplus \cdots \oplus d_m z_m D \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0,$$

voor zekere $z_i \in M$, $d_i \in D$ zodat ...]

“*“Who said anything about panicking?” snapped Arthur. “This is still just the culture shock. You wait till I’ve settled down into the situation and found my bearings. Then I’ll start panicking.”*”

— The Hitchhiker’s Guide to the Galaxy