Opgelost oefeningenexamen Analyse I

januari 2016

Sébastien Chevalier

Taylorbenadering van $f(x) := \dfrac{e^x}{\sin x + \cos x}$

tactiek: euclidisch delen van de taylorbenaderingen in $x=0$ van teller en noemer

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{cases}$$

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

$$-(\quad - \quad - \quad\quad\quad - \quad)$$

$$\frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} \quad\quad + \frac{2x^6}{6!}$$

$$-\left(x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!}\right)$$

$$-\frac{4x^3}{3!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} - \frac{28x^6}{6!}$$

$$-\left(-\frac{4x^3}{3!} - \frac{4x^4}{3!} + \frac{4x^5}{3!2!} + \frac{4x^6}{3!3!}\right)$$

$$\frac{7}{3!}x^4 - \frac{x^5}{3!} - \frac{108}{6!}x^6$$

$$-\left(\frac{7}{3!}x^4 + \frac{7}{3!}x^5 - \frac{7x^6}{3!2!}\right)$$

$$-\frac{8}{3!}x^5 + \frac{312}{6!}x^6$$

$$-\left(-\frac{8}{3!}x^5 - \frac{8}{3!}x^6\right) = \frac{1272}{6!}x^6$$

$$1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$1 + x^2 - \frac{4x^3}{3!} + \frac{7}{3!}x^4 - \frac{8}{3!}x^5 + \frac{1272}{6!}x^6$$

$$\boxed{1 + x^2 - \frac{4}{3!}x^3 + \frac{7}{3!}x^4 - \frac{8}{3!}x^5 + \frac{1272}{6!}x^6}$$

$\|$

Taylorbenadering in $x=0$ voor $\dfrac{e^x}{\sin x + \cos x}$

$\|$

$$\boxed{1 + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{53}{30}x^6}$$

(a) Geef de volledige Taylorreeks van

$$f(x) := \frac{1}{x^3}\int_0^x \arctan(t^2)\,dt$$

(b) Geef aan voor welke x deze reeks convergeert

— oplossing

(a) Om de Taylorreeks van $f(x)$ op te stellen is er eerst deze vereist van het integrandum

· Taylorreeks bepalen van $\arctan(t^2)$

$$g(x) := \arctan(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

↳ schrijfbaar als reeks adhv de meetkundige reeks

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$$

VWE $|-x^2| < 1$

(*) $\Rightarrow x \in \,]-1,1[$

$$g(x) = \int g'(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$$

$$\Longleftrightarrow \underset{\text{over }]-1,1[}{(-x^2)^n \text{ is } C^\infty} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

deze convergeert naar $g(x)$ voor $x \in \,]-1,1[$

De Taylorreeks voor arctan(x^2) wordt dan

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

- integraal en sommatie omwisselen

$$\frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^x x^{4n+2} \, dx$$

$$\frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n+1)(4n+3)}$$

(b) Deze reeks convergeert op $x \in]-1,1[$ naar de oorspronkelijke functie gegeven de functie

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & x \in [0,\pi] \\ 0 & x \in \,]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(a) Geef een Fourierreeks die op $[0,2\pi]$ bijna overal gelijk is aan f en zodat x in de reeks alleen in cosinussen voorkomt.

(b) Beschrijf precies hoe de $f^{\sim}$, gegeven door de Fourierreeks zich gedraagt op heel $\mathbb{R}$

(c) Vind met deze reeks een nieuwe afleiding voor de reeks

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

(a) Beschouw de even uitbreiding f^* van f over het interval $[-2\pi, 2\pi]$ zodanig dat er een symmetrisch interval tov 0 verkregen wordt

$$f^* : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & x \in [-2\pi, -\pi[\cup]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

bepalen van Fourierontwikkeling

merk op: daar f^* even is, zal het product met $\sin(\frac{nx}{2})$ een oneven f^{ie} opleveren, geïntegreerd over een symm. int. levert dit 0 $\Longrightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-2\pi}^{-\pi} 0 \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \ldots \right)$$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{\text{even}} \underbrace{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}_{\text{even}} dx \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \right)$$

$$a_n = \frac{1 \cdot 2}{2\pi} \left(\frac{2}{n} \right)^3 \int_0^{\pi} \left(\frac{nx}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{nx}{2}\right) d\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$\frac{nx}{2} = t$

$x : 0 \rightarrow \pi$

$t : 0 \rightarrow \frac{n\pi}{2}$

$$a_n = \frac{8}{\pi n^3} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} t^2 \cos(t) dt$$

I. $\downarrow$

$$a_n = \frac{8}{\pi n^3}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \underbrace{t^2}_{f}\cdot\underbrace{\cos(t)}_{g'}\,dt \qquad \begin{cases} f' = 2t \\ g = \sin(t) \end{cases}$$

$$a_n = \frac{8}{\pi n^3}\left(\left[t^2\sin(t)\right]_0^{\frac{n\pi}{2}} - \int_0^{\frac{n\pi}{2}} 2t\sin(t)\,dt\right)$$

I. (2) $\downarrow$

$$\begin{cases} f' = 1 \\ g = -\cos(t) \end{cases}$$

$$a_n = \frac{8}{\pi n^3}\left(\left[t^2\sin(t)\right]_0^{\frac{n\pi}{2}} - 2\left(\left[-t\cos(t)\right]_0^{\frac{n\pi}{2}} + \int_0^{\frac{n\pi}{2}}\cos(t)\,dt\right)\right)$$

$$a_n = \frac{8}{\pi n^3}\left(\left[t^2\sin(t)\right]_0^{\frac{n\pi}{2}} + \left[2t\cos(t)\right]_0^{\frac{n\pi}{2}} - \left[2\sin(t)\right]_0^{\frac{n\pi}{2}}\right)$$

$$a_n = \frac{8}{\pi n^3}\left(\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \begin{cases} \xrightarrow{n \text{ even}} 0 \\ \xrightarrow[n \text{ oneven}]{} \pm 1 \end{cases} \qquad \text{stel } n = 2k-1 \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \begin{cases} \xrightarrow{n \text{ even}} \pm 1 \\ \xrightarrow[n \text{ oneven}]{} 0 \end{cases} \qquad \text{stel } n = 2k \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{k}$$

opsplitsing van coëfficiënten

$$a_n \begin{cases} n \text{ even} & \frac{8}{\pi 8k^3}\cdot 2k\pi(-1)^k = \boxed{\frac{2}{k^2}(-1)^k} := a_{ev} \\ n \text{ oneven} & \frac{8}{\pi(2k-1)^3}\left(n\pi\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{2}{n\pi}\right)\right) = \boxed{\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\left((2k-1)\pi - \frac{8}{(2k-1)\pi}\right)} =: a_{on} \end{cases}$$

(b) De fourierontwikkeling kan dan geschreven worden als

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2}(-1)^k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\left((2k-1)\pi - \frac{8}{(2k-1)\pi}\right)\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right)$$

doorgetr. over $\mathbb{R}$ $\quad \pm 2k\pi$

Deze reeks zal convergeren naar f^* $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$ behalve voor $x = k2\pi + \pi$ $k \in \mathbb{Z}$ [illegible] want daar is f^* n̄ continu dus convergeert de reeks naar de halve sprongwaarde, deze bedraagt dan $\frac{\pi^2}{2}$.

<u>merk op</u>: indien de laatste term

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\left((2k-1)\pi - \frac{8}{(2k-1)\pi}\right)\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right)$$

weggelaten wordt dan is dit de fourierontwikk^{ng} van x^2 die elke periode $[-\pi, \pi]$ verder gezet wordt. Deze som zorgt er dus voor dat de uitbreiding van $x = 0$ $x \in]\pi, 2\pi]$ verder gezet wordt.

Vind alle oplossingen $y :]3,\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ die voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{-4x^4}{x^2-2x-3}$$

<u>oplossing</u> Een oplossing voor de homogene dvgl kan verkregen worden mbhv een Euler-substitutie

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $(x \neq 0)$

$$\frac{y''}{x^2} - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

→ in $]0,+\infty[$ $\supset]3,+\infty[$

→ in $]-\infty,0[$

$t = \ln(+x)$ $\quad x \in]0,+\infty[$

$\exp(t) = x$

$\longrightarrow \; y(x) \longrightarrow y(x(t)) := \phi(t)$

$\phi(t) = y$

$\phi'(t) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \; \} \; e^t = x \quad = xy'$

$\phi''(t) = x\left(\frac{d^2y}{dx^2} \cdot x\right) + \frac{dy}{dx} \cdot x = x^2y'' + xy'$

$\Longrightarrow \; \phi''(t) - 5\phi'(t) + 6\phi(t) = 0$

Ⓓ $= \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6} = 1$

$\rightsquigarrow \; \overset{*}{\phi}(t) = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \overset{*}{\phi}(t) = 3 \vee \overset{*}{\phi}(t) = 2$

voor de diff. vgl in ϕ wordt de oplossing zo:

$$\phi(t) = C_1 \exp(3t) + C_2 \exp(2t)$$

<u>substitutie ongedaan</u> →

$$y(x) = C_1 \exp(3\ln(x)) + C_2 \exp(2\ln(x))$$

oplossing voor de homogene dvgl

$$y(x) = \underbrace{C_1 x^3}_{y_1} + \underbrace{C_2 x^2}_{y_2}$$

Nu dient nog een particuliere oplossing gevonden te worden uit één vd opl^n vd homogene door verlaging vd orde.

noem $\tilde{y}(x) = u(x) \cdot y_2 = u x^2$

$\tilde{y}'(x) = u'x^2 + 2ux$

$\tilde{y}''(x) = u''x^2 + 2u'x + 2u'x + 2u$

$\xrightarrow[\text{in dvgl}]{\text{invullen}}$

$$x^2(u''x^2 + 2u'x + 2u'x + 2u)$$
$$+ (-4x)(u'x^2 + 2ux)$$
$$+ 6(ux^2)$$

$$u''x^4 + \underbrace{2u'x^3 + 2u'x^3}_{\cancel{4u'x^3}} + 2ux^2 \underbrace{- 4u'x^3} - 8ux^2 + 6ux^2$$

vgl levert $\quad u''\cancel{x^4} = \dfrac{-4\cancel{x^4}}{x^2 - 2x - 3}$

$$u'' = \frac{-4}{x^2 - 2x - 3} = \frac{-4}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+1)}$$

(splitsen in partieelbreuken)

$A(x+1) + B(x-3) = -4$

$(A + B)x + A - 3B = -4$

$$\begin{cases} A + B = 0 \rightarrow A = -B \\ \underset{-B}{\boxed{A}} - 3B = -4 \end{cases}$$

$-4B = -4$

$\Rightarrow B = 1$

$A = -1$

$$u'' = \frac{-1}{(x-3)} + \frac{1}{(x+1)}$$

$$u' = \int \frac{-1}{x-3}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + C_3$$

$$u' = -\ln\underbrace{(x-3)}_{\substack{>0 \\ (x>3)}} + \ln(x+1)$$

voor het beschouwde interval

$]+3, +\infty[$

$$u' = \ln(x+1) - \ln(x-3)$$

$$u' = \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$$

$$u = \int \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) dx$$

$$\Longrightarrow \quad u = \int \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) dx$$

$$\xrightarrow[\text{als verschil}]{\text{makkelijker}} \quad u = \int \ln(x+1)\,dx - \int \ln(x-3)\,dx$$

$$\begin{aligned} u = {} & (x+1)\ln(x+1) - (x+1) \\ + \; & \underline{-(x-3)\ln(x-3) + (x-3)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad u = (x+1)\ln(x+1) - (x-3)\ln(x-3) - 4 + C_3$$

gecombineerd
geen betekenis C_3
KIES = 0

zodat de algemene oplossing gegeven wordt door

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + u x^2$$

$$\boxed{y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + \left[(x+1)\ln(x+1) - (x-3)\ln(x-3)\right] x^2}$$

Oplossingen oefeningenexamen Analyse I

januari 2016

Sébastien Chevalier

Oefening 1 ~ Taylorbenadering

> $with(plots)$:

> $f := x \rightarrow \frac{\exp(x)}{\sin(x) + \cos(x)};$

$$f := x \rightarrow \frac{e^x}{\sin(x) + \cos(x)}$$

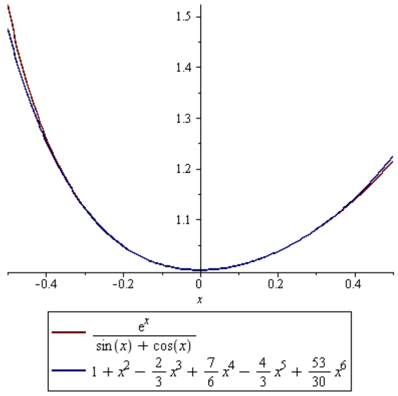
> $taylor(f(x), x = 0, 7);$

$$1 + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{53}{30}x^6 + O(x^7)$$

> $f\_ben := x \rightarrow 1 + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{53}{30}x^6;$

$$f\_ben := x \rightarrow 1 + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{53}{30}x^6$$

> $plot\left([f(x), f\_ben(x)], x = -\frac{1}{2} .. \frac{1}{2}, legend = [f(x), f\_ben(x)] \right);$



<u>Observatie</u>

De taylorbenadering tot de zesde orde van de functie $f(x)$ vormt een goede benadering, met aanvaardbare fout, tot ongeveer het interval $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Oefening 2 ~ Taylorreeks

> *restart;*

> *with(plots) :*

> $f := x \rightarrow \frac{1}{x^3} \cdot int\left(\arctan\left(t^2\right),\ t = 0\ ..x\right);$

$$f := x \rightarrow \frac{\int_0^x \arctan\left(t^2\right) \mathrm{d}t}{x^3}$$

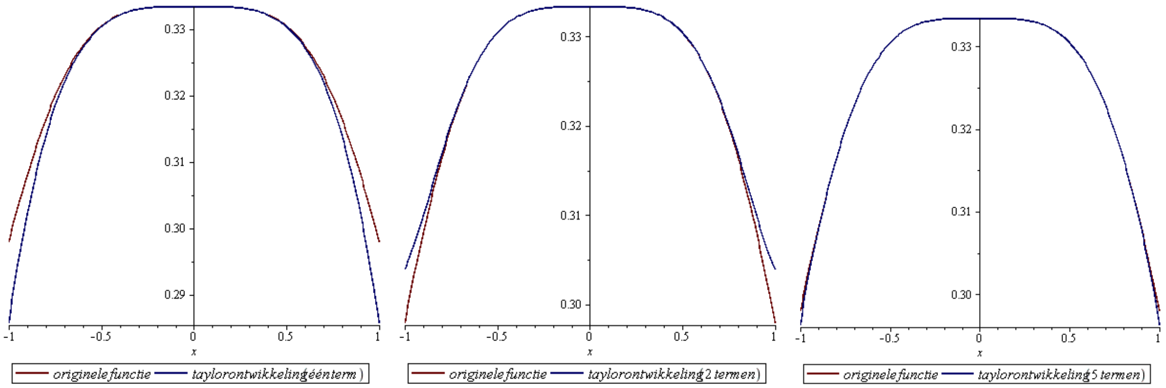
> $taylorreeks := Sum\left(\frac{(-1)^n \cdot x^{4\,n}}{(2\,n+1)\cdot(4\,n+3)},\ n = 0\ ..infinity\right);$

$$taylorreeks := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{4\,n}}{(2\,n+1)\ (4\,n+3)}$$

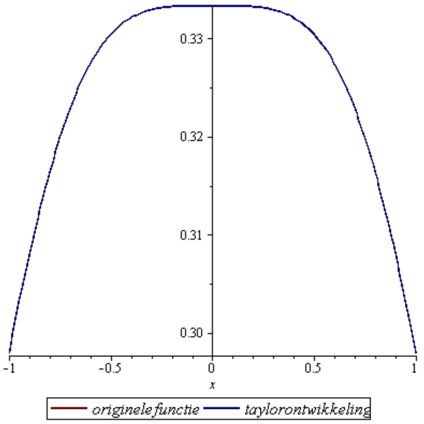
> $g := (x,\ l) \rightarrow Sum\left(\frac{(-1)^n \cdot x^{4\,n}}{(2\,n+1)\cdot(4\,n+3)},\ n = 0\ ..l\right);$

$$g := (x,\ l) \rightarrow \sum_{n=0}^{l} \frac{(-1)^n\, x^{4\,n}}{(2\,n+1)\ (4\,n+3)}$$

>
plot([*f*(*x*), *g*(*x*, 1)], *x* =−1 ..1, *legend* = [*originele functie*,
taylorontwikkeling(*één term*)]);
plot([*f*(*x*), *g*(*x*, 2)], *x* =−1 ..1, *legend* = [*originele functie*,
taylorontwikkeling(2 *termen*)]);
plot([*f*(*x*), *g*(*x*, 5)], *x* =−1 ..1, *legend* = [*originele functie*,
taylorontwikkeling(5 *termen*)]);



> *plot*([*f*(*x*), *g*(*x*, 100)], *x* =−1 ..1, *legend* = [*originele functie*, *taylorontwikkeling*]);



<u>Observatie</u>

De taylorontwikkeling convergeert op het interval $]-1,\ 1[$ naar de originele functie als reekssom.

Oefening 3 ~ Fourierontwikkeling

> $restart;$

> $piecewise\left(0 \le x \le \mathrm{Pi}, x^2, \mathrm{Pi} < x \le 2\cdot \mathrm{Pi}, 0\right)$

$$\begin{cases} x^2 & 0 \le x \ \textbf{and}\ x \le \pi \\ 0 & \pi < x \ \textbf{and}\ x \le 2\,\pi \end{cases}$$

> $f := x \to piecewise\left(0 \le x \le \mathrm{Pi}, x^2, \mathrm{Pi} < x \le 2\cdot \mathrm{Pi}, 0\right);$

$$f := x \to piecewise\left(0 \le x \ \textbf{and}\ x \le \pi, x^2, \pi < x \ \textbf{and}\ x \le 2\,\pi, 0\right)$$

De periodieke oneven uitbreiding van $f(x)$ wordt gegeven door onderstaande functie.

> $f\_uitbr := x \to piecewise\left(-\mathrm{Pi} \le x \le \mathrm{Pi}, x^2, \mathrm{Pi} < x \le 2\cdot \mathrm{Pi}, 0, -2\cdot\mathrm{Pi} \le x < -\mathrm{Pi}, 0\right);$

$$f\_uitbr := x \to piecewise\left(-\pi \le x \ \textbf{and}\ x \le \pi, x^2, \pi < x \ \textbf{and}\ x \le 2\,\pi, 0, -2\,\pi \le x \ \textbf{and}\ x < -\pi, 0\right)$$

> $with(plots):$

Eigen berekeningen

De berekende coëfficiënten voor de cosinusreeks zien er als volgt uit

$$a\_0 := k \to \frac{\pi^2}{3}$$

$$a\_n := n \to \frac{8\left(\frac{1}{4}\,n^2\,\pi^2 \sin\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) + n\,\pi\cos\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) - 2\sin\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right)\right)}{\pi\,n^3}$$

$$a\_even\_n := k \to \frac{2\,(-1)^k}{k^2}$$

$$a\_oneven\_n := k \to \frac{8\left(\frac{1}{4}\,(2\,k-1)^2\,\pi^2\,(-1)^{k+1} - 2\,(-1)^{k+1}\right)}{\pi\,(2\,k-1)^3}$$

> $a\_even\_n := k \to \frac{2}{k^2}\cdot(-1)^k \text{ assuming}(k, integer);$

$$a\_even\_n := k \to \frac{2\,(-1)^k}{k^2}$$

> $a\_oneven\_n := k \to \frac{8}{\mathrm{Pi}\cdot(2\cdot k-1)^3}\cdot\left(\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\mathrm{Pi}}{2}\right)^2\cdot(-1)^{k+1} - 2\cdot(-1)^{k+1}\right)$
> $\text{assuming}(k, integer);$

$$a\_oneven\_n := k \to \frac{8\left(\frac{1}{4}\,(2\,k-1)^2\,\pi^2\,(-1)^{k+1} - 2\,(-1)^{k+1}\right)}{\pi\,(2\,k-1)^3}$$

> $a\_n := n \to \frac{8}{\mathrm{Pi}\cdot n^3}\cdot\left(\left(\frac{n\cdot\mathrm{Pi}}{2}\right)^2\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\mathrm{Pi}}{2}\right) + n\cdot\mathrm{Pi}\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\mathrm{Pi}}{2}\right) - 2\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\mathrm{Pi}}{2}\right)\right)$
> $\text{assuming}(n, integer);$

$$a\_n := n \to \frac{8\left(\frac{1}{4}\,n^2\,\pi^2 \sin\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) + n\,\pi\cos\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) - 2\sin\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right)\right)}{\pi\,n^3}$$

>

$fourierontw\_even := (x, l) \to Sum(a\_even\_n(k)\cdot\cos(k\cdot x), k = 1..l) \text{ assuming}(k,$ $integer);$

$fourierontw\_oneven := (x, l) \to Sum\left(a\_oneven\_n(k)\cdot\cos\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot x}{2}\right), k = 1..l\right)$
$\text{assuming}(k, integer);$

$fourierontw := (x, l) \to \frac{\pi^2}{6} + fourierontw\_even(x, l) + fourierontw\_oneven(x, l);$

$$fourierontw\_even := (x, l) \to \sum_{k=1}^{l} a\_even\_n(k)\cos(k\,x)$$

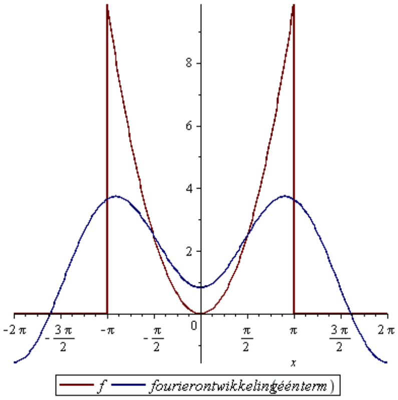
$$fourierontw\_oneven := (x, l) \to \sum_{k=1}^{l} a\_oneven\_n(k)\cos\left(\frac{1}{2}\,(2\,k-1)\,x\right)$$

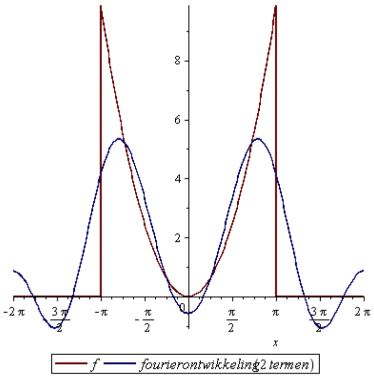
$$fourierontw := (x, l) \to \frac{1}{6}\,\pi^{2} + fourierontw\_even(x, l) + fourierontw\_oneven(x, l)$$

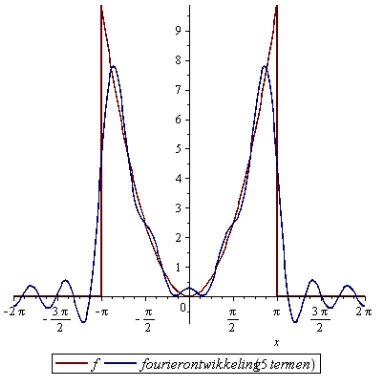
```
> plot([f_uitbr(x), fourierontw(x, 1)], legend = [f, fourierontwikkeling(één term)]) :
  plot([f_uitbr(x), fourierontw(x, 2)], legend = [f, fourierontwikkeling(2 termen)]) :
  plot([f_uitbr(x), fourierontw(x, 5)], legend = [f, fourierontwikkeling(5 termen)]) :
  plot([f_uitbr(x), fourierontw(x, 10)], legend = [f, fourierontwikkeling(10 termen)]) :
  plot([f_uitbr(x), fourierontw(x, 100)], legend = [f,
      fourierontwikkeling(100 termen)]) :
```

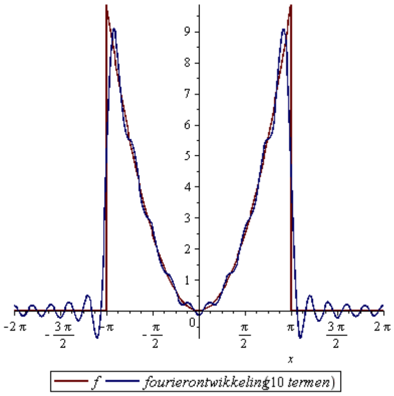
Conclusie

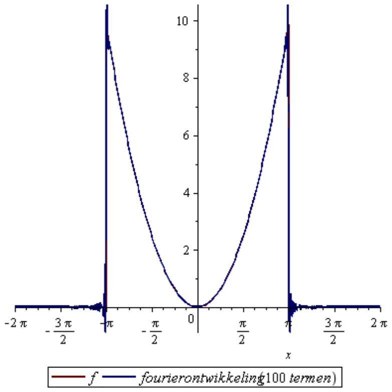
Wanneer er steeds meer termen aan de Fourierontwikkeling worden toegevoegd wordt duidelijk dat deze inderdaad zal convergeren naar de genormaliseerde periodieke uitbreiding (hier slechts weergegeven over één periode). In de randpunten van elk periodiek interval zal de Fourierontwikkeling convergeren naar de halve sprong waarde.











Oefening 4 ~ Differentiaalvergelijking

> restart;

> $differentiaalvergelijking := x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 4 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} y(x) + 6 \cdot y(x) = -\frac{4x^4}{x^2 - 2x - 3};$

$$differentiaalvergelijking := x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) - 4x \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 6\, y(x) = -\frac{4x^4}{x^2 - 2x - 3}$$

> $dsolve(differentiaalvergelijking);$

$$y(x) = x^2\, \_C2 + x^3\, \_C1 - x^2\, ((x-3)\ln(x-3) - \ln(x+1)\,(x+1))$$

Conclusie

Op het interval $]3, +\infty[$ is dit inderdaad de algemene oplossing van de bovenstaande differentiaalvergelijking.