Statistische Fysica 1: 18 januari 2016

THEORIE (30 punten)

(10 PUNTEN VOOR ONDERSTAANDE TWEE THEORIEVRAGEN T1 (3 PUNTEN) EN T2(7 PUNTEN), 20 PUNTEN VOOR HET MONDELING EXAMEN)

T1: Beschouw een systeem van N atomen met massa M die gedwongen worden in een volume V te bewegen. Het systeem wordt op een temperatuur T gehouden door contact met een warmtebad. Leg een verband tussen de soortelijke warmte C_V van het systeem, de canonische partitiefunctie en de grootheid ΔE. Bepaal en bereken de verhouding $\frac{\Delta E}{E}$ als een functie van het aantal atomen N in het systeem?

T2: Om de toestandsvergelijking van een niet-relativistisch ideaal Bose-Einstein gas voor een systeem met spin S deeltjes af te leiden, wordt gestart van een redenering van het type ($z \equiv e^{\beta\mu}$)

$$\begin{aligned}
\Phi(T,V,\mu) &= -kT \ln \mathcal{Z}(T,V,\mu) = E - TS - \mu N \\
&= -kT \sum_p \ln \mathcal{Z}_p^{BE} \\
&= +kT \sum_p \ln \left(1 - z e^{\frac{-\beta p^2}{2m}}\right) \\
&= +kT(2S+1)\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty dp p^2 \ln\left(1 - z e^{\frac{-\beta p^2}{2m}}\right) \ , \qquad (1)
\end{aligned}$$

- Verantwoord en becommentariëer de verschillende stappen die in de bovenstaande afleiding van vergelijking (1) werden doorgevoerd.
- Leid op basis van het bovenstaande de volgende formule af voor de gemiddelde druk P in een Bose-Einstein gas

  $$\frac{P}{kT} = \frac{(2S+1)}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \qquad \left(\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi M kT}}\right) \ .$$

  Bepaal daarbij de exacte mathematische uitdrukking voor $g_{5/2}(z)$.
- Leid op basis van het bovenstaande een algemene formule af voor de gemiddelde dichtheid $\frac{N}{V}$ in een Bose-Einstein gas.
- Leg een verband tussen de uitdrukkingen voor P en $\frac{N}{V}$ die je hierboven bekomen hebt en het verschijnsel van *"Bose-Einstein condensatie"*.

OEFENINGEN (20 punten)

BIJ HET OPLOSSEN VAN DE OEFENINGEN KUN JE ENKEL JE CURSUS GEBRUIKEN! HET IS NIET TOEGELATEN OM GEBRUIK TE MAKEN VAN ANDERE HULPMIDDELEN, ZOALS BIJVOORBEELD SETS VAN OPGELOSTE OEFENINGEN.

OEFENING 1 (1O PUNTEN): MAGNETISME VOOR BEWEGENDE DEELTJES

Beschouw een gas van spin-1 deeltjes met massa m die bewegen in een volume V. Elk van de deeltjes i is onderhevig aan een hamiltoniaan van het type

$$H^{(1)}(i) = \frac{p_i^2}{2m} - \mu_B s_z(i)\mathcal{B} \ ,$$

waarbij $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ en $s_z(i) \in \{-1, 0, +1\}$. We beschouwen condities waarbij de sterkte van het magnetisch veld zwak is, zodat $\frac{\mu_B \mathcal{B}}{kT} \ll 1$. De totale hamiltoniaan $H^{(N)}$ van het systeem wordt gegeven door

$$H^{(N)} = \sum_{i=1}^{i=N} H^{(1)}(i)$$

Voor de deelvragen O1a-O1d beschouw je condities van hoge temperatuur en lage dichtheid zodat het systeem aan de voorwaarden van een "klassiek gas" voldoet.

O1a: Bereken het gemiddeld aantal bosonen $\left(\overline{N}_-, \overline{N}_0, \overline{N}_+\right)$ in elk van de drie spintoestanden.

O1b: Bereken het totaal magnetisch moment $\mathcal{M}$ van het systeem als functie van de sterkte van het magnetisch veld $\mathcal{B}$ en de temperatuur T.

O1c: Bereken de zogenaamde "zero-field susceptibility" $\chi_{\mathcal{B}\to 0}$

$$\chi_{\mathcal{B}\to 0} = \frac{\mu_0}{V}\left(\frac{\partial \mathcal{M}(T, \mathcal{B})}{\partial \mathcal{B}}\right)_{\mathcal{B}\to 0} \ ,$$

door $\mathcal{M}$ gepast te ontwikkelen in machten van $\mathcal{B}$. In hoeverre vind je Curie's wet terug? Is dit een logisch resultaat?

O1d: Bereken de chemische potentiaal van de deeltjes.

(vervolg van oefening 1)

Voor het vervolg van de vraag (deelvragen O1e-O1f) beschouw je condities van de temperatuur en de dichtheid zodat de thermische golflengte van de deeltjes vergelijkbaar wordt met de gemiddelde separaties tussen de deeltjes.

O1e: Bereken het totaal magnetisch moment $\mathcal{M}$ van het systeem als functie van $\mathcal{B}$, T en de fugaciteit z.

O1f: Ga na in hoeverre je resultaat voor $\mathcal{M}$ van punt O1e in de klassieke limiet het resultaat voor $\mathcal{M}$ van punt O1b reproduceert.

OEFENING 2 (10 PUNTEN): EXCITONEN

Door een intense laser op een halfgeleider te richten kan men een metastabiele toestand genereren. De metastabiele toestand wordt gecreëerd uit elektronen (lading $-e$ en effectieve massa m_e), en zogenaamde "gaten" (lading $+e$ en effectieve massa m_h) in het volume V van de halfgeleider. De tegengesteld geladen elektronen en gaten kunnen ofwel paren vormen van elektrisch neutrale deeltjes (zoals een proton en een elektron in het waterstofatoom), ofwel als "vrije" deeltjes blijven bestaan. De elektron-gat paren noemt men EXCITONEN. We beschouwen hier een zeer eenvoudig model voor het proces onder studie.

O2a: Bepaal de vrije energie van het gas van N_e elektronen en N_h gaten bij een temperatuur T. **Behandel de elektronen en gaten als een KLASSIEK GAS van VRIJE DEELTJES.** Bepaal ook de chemische potentiaal van de elektronen (μ_e) en de gaten (μ_h).

O2b: Door een exciton te vormen kan het elektron-gat paar zijn energie verlagen. De bindingsenergie wordt gegeven door

$$W = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon^2} ,$$

met ϵ de diëelktrische constante en μ de gereduceerde massa

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h} .$$

Bepaal de vrije energie van de N_p excitonen. **Behandel de excitonen als een KLASSIEK GAS van VRIJE DEELTJES met massa $m_p = m_e + m_h$.** Bepaal ook de chemische potentiaal μ_p van de excitonen.

O2c: Vind een criterium dat het evenwicht uitdrukt van het elektron-gat-exciton systeem.

O2d: Bepaal de dichtheid aan excitonen (ρ_p) in termen van de dichtheid aan elektronen en gaten (ρ_e en ρ_h).