Wetenschappelijk Rekenen

Examen - Bacheloropleiding informatica

Theorie – 25 mei 2016

Naam : ....

1. (5 pt) Definieer, formuleer of omschrijf de volgende begrippen :

   (i) Gaussische kwadratuur:

   (ii) kubische splines:

   (iii) het conditiegetal van een probleem:

   (iv) UFL en ϵ_{mach}:

   (v) pseudo-inverse van een matrix:

2. (3 pt) Hoe los je een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden op? Zijn er factoren die de keuze van het algoritme beïnvloeden?

3. (3 pt) Stel dat het scalaire probleem $x = g(x)$ opgelost wordt via iteratie : $x_{k+1} = g(x_k)$, met x_0 willekeurig. Wat kun je vertellen over de convergentie en de convergentiesnelheid van dit numerieke schema? Hoe moet je deze resultaten aanpassen in het geval het probleem meer-dimensionaal wordt, m.a.w. in het geval je te maken hebt met stelsels en x een vector is?

4. (4 pt)

(i) (2 pt) Leg op een schematische wijze uit hoe een DFT kan gebruikt worden om ruis te elimineren uit een signaal van lengte $n = 2^m$. Bespreek de complexiteit van de bewerkingen die hierbij aan bod komen. Leg hierbij ook uit waarom de omweg via de DFT te verkiezen is.

(ii) (2 pt) Hoe ontstaat een DCT uit een DFT? Vermeld een voordeel van DCT t.o.v. DFT.

5. (1 pt) In de cursus hebben we gezien dat wetenschappelijk rekenen aparte technieken vraagt : sommige wiskundige technieken die je in het middelbaar aangeleerd gekregen hebt, zijn computationeel gezien oninteressant. Kun je een voorbeeld geven ?

6. (1 pt) Stel dat je weet dat de eigenwaarden λ_i, $i = 1, \ldots, n$ van een $n \times n$ matrix A allemaal reëel zijn en voldoen aan $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Bepaal, gebruik makend van alleen (genormeerde) machtiteratie en shiften, op een numerieke manier λ_1 en λ_n.

7. (1 pt) Stel dat de middelpuntregel gebruikt wordt voor de benadering van de dubbelintegraal $\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Hoe luidt de resulterende kwadatuurregel $Q(f)$?

8. (1 pt) De Runge-Kutta methode

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i\, k_i\,, \\ \quad k_i = f(x_n + c_i\, h,\, y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, k_j), \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, s\,, \end{cases}$$

met Butcher-tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

wordt toegepast op $y' = y^2$, $y(0) = 1$ met staplengte h. Bepaal y_1.

9. (1 pt) Beschouw de onderstaande Matlab-code, waarin het nemen van één stap van lengte h met een lineaire meerstapsmethode wordt geïmplementeerd. Hoe luidt die lineaire meerstaps-methode?

```
function  y=methodeAstep(x1,y0,y1,g,jac,h);
x2=x1+h;
x0=x1-h;
y=y1;
delta=1;
ident=eye(length(y1));
while abs(delta) > 10^(-6)
  A=ident-h/4*feval(jac,x2,y);
  f=-(y+y1-2*y0-h/4*(g(x2,y)+8*g(x1,y1)+3*g(x0,y0)));
  delta=A\f;
  y=y+delta;
end
```