1ste Ba Fysica-Sterrenkunde – 3.6.2016
Analyse II

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgave.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Vraag I.

1. Definieer (i) afleidbaarheid voor $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^m$ vecfunctiewaardige functies; (ii) Jacobiaanse matrix in een punt; (iii) Jacobiaanse determinant in een punt.
2. Formuleer (geen bewijs) de 'stelling van de impliciete functies'.
3. Gegeven zijn afleidbare functies $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ en $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Onderstel dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = 0$ for alle punten $\mathbf{x}$ in een omgeving van $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Geef een formule voor $D\mathbf{g}(\mathbf{a})$ in termen van Jacobiaanse matrices van $\mathbf{f}$. (Leg uit hoe de formule afgeleid wordt.)
4. Formuleer en bewijs de 'stelling van de inverse functies'.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag II.

1. Definieer (i) glad oppervlak; (ii) normaalvector van een oppervlak; (iii) oppervlakte-integraal van een continu vectorveld.
2. Formuleer (geen bewijs) de 'stelling van Stokes'.
3. In de stelling van Stokes komen te pas: een parametervoorstelling van het oppervlak Σ, nl. $\boldsymbol{\varphi} : K \to \mathbb{R}^3$, en een parametervoorstelling voor $(\partial K)_+$, nl.

$$u = \omega_1(t), \quad v = \omega_2(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

   (a) Geef een parametervoorstelling voor $(\partial\Sigma)_+$.
   (b) Schrijf $\oint_{(\partial\Sigma)_+} P(x, y, z)\, dx$ als een gewone integraal van één veranderlijke.
   (c) Schrijf deze gewone integraal als een vlakke integraal.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag III.

1. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin 4x + e^{-x^2}}{x} + x^2 e^{-x^2} + x^3 \cos x \right) dx.$
2. Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):
   (a) De afstand tussen twee disjuncte gesloten verzamelingen is positief.
   (b) Als $f(x, y)$ afleidbaar is naar x en y in een bepaald punt, dan is f ook afleidbaar in het punt.
   (c) f is Lipschitzcontinu over $\mathbb{R} \implies f$ is afleidbaar over $\mathbb{R}$.
   (d) Zij Γ de vlakke kromme $x^2 + 3y^2 = 1$ doorlopen in tegenwijzerzin. Dan is $\displaystyle\int_\Gamma x e^{x^2+y^2} dx + y e^{x^2+y^2} dy = 0.$

NIEUW DUBBEL BLAD

Tijd tot 11.00. Oefeningen om 14.00, zelfde plaats.

1ste Ba Fysica-Sterrenkunde

03.VI.16

Analyse II oefeningen

(i) *Schrijf **naam** en **richting** boven elk blad.*

(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*

(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*

(iv) *Een tekening is niet verplicht.*

(v) *Bij parametervoorstellingen: schrijf op hoe u aan uw parametervoorstelling komt. U moet de kenmerkende eigenschappen van een parametervoorstelling niet nagaan.*

(vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1. Bereken $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{ds}$, waarbij $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, x^2z)$ en Γ de snijkromme is van $x^2 - y^2 = 1$ en $z = x^2 + y^2$, doorlopen van $(-1, 0, 1)$ naar $(-3, 2\sqrt{2}, 17)$.

Vraag 2. Bereken het volume van het gebied V dat bepaald wordt door de ongelijkheden $x^2 + 3y^2 + 3z^2 \leq 4$ en $z \geq x^2 + 3y^2$.

Vraag 3. Zij Σ het deel van de cilindermantel $x^2 + z^2 = 2z$ binnen de kegel $z^2 \geq x^2 + y^2$. Bereken $\iint_\Sigma |y| \sqrt{z} d\sigma$.

Vraag 4.

Zij $a < b$. Bepaal alle λ waarvoor de differentiaalvergelijking

$$y'' + \lambda y = 0$$

onder de randvoorwaarden $y'(a) = y'(b) = 0$ niet-triviale oplossingen heeft en bepaal deze oplossingen.

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Tijd tot 18:00