I. Multiple choice (3,5 punten)

1. Als f een continue afbeelding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is, dan is f afleidbaar op heel $\mathbb{R}$.
   (J) Ja. **(N)** Nee.
   (Als f afleidbaar is, dan is f continu, maar niet omgekeerd, zoals bijv. blijkt uit $f(x) = |x|$.)

2. Als f en g afleidbare afbeeldingen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn en $x \in \mathbb{R}$, dan is (meerdere antwoorden mogelijk):
   (A) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (B) $(fg)'(x) = f'(x)g'(x)$ (C) $\big(f(g(x))\big)' = f'(g'(x))$
   (D) Geen van de vorige is juist.

3. Welke van de volgende uitspraken zijn juist als $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$? (meerdere antwoorden mogelijk)
   (A) Als $a = \inf A$, dan behoort a tot A.
   (B) Als A begrensd is en a behoort tot A, dan is $a \geqslant \inf A$.
   (C) Geen van de vorige is juist.

4. Welke van de volgende uitspraken zijn juist als $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ en s een bovengrens is van A? (meerdere antwoorden mogelijk)
   (A) Als er $\varepsilon > 0$ en $x \in A$ bestaan waarvoor $x < s + \varepsilon$, dan is $s = \sup A$.
   (B) Als er $\varepsilon > 0$ en $x \in A$ bestaan waarvoor $x > s - \varepsilon$, dan is $s = \sup A$.
   (C) Geen van de vorige is juist.

5. Welke van de volgende uitspraken zijn juist? (meerdere antwoorden mogelijk)
   (A) Elke begrensde rij van reële getallen heeft een convergente deelrij.
   (B) Elke convergente rij van reële getallen heeft een begrensde deelrij.
   (C) Geen van de vorige is juist.

6. Als f en g continue afbeeldingen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn, dan is de functie $f\big(\frac{1}{g(x)}\big)$ noodzakelijk (meerdere antwoorden mogelijk)
   (A) continu in elke $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $x \neq 0$
   (B) continu in elke $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $f(x) \neq 0$
   (C) continu in elke $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $g(x) \neq 0$
   (D) continu in elke $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\frac{1}{g(x)} \neq 0$
   (E) continu in elke $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $f\big(\frac{1}{g(x)}\big) \neq 0$
   (F) Geen van de vorige is juist.

   Ook goedgekeurd zijn de volgende combinaties: **(C),(D)** en **(C),(D),(E)** voor wie redeneerde: $1/g(x) \neq 0 \Rightarrow 1/g(x)$ bestaat $\Rightarrow g(x) \neq 0$.

7. Als a, b, c positieve reële getallen zijn, dan is $\big(a^{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\big)^{bc}$ gelijk aan (meerdere antwoorden mogelijk):
   (A) $a^{\frac{1}{b}} a^{\frac{1}{c}} a^{bc}$ (B) $a^{\frac{1}{b}} + a^{\frac{1}{c}} + a^{bc}$ **(C)** $a^b a^c$ (D) $a^b + a^c$ (E) Geen van de vorige is juist.

II. Parate kennis (1,5 punten)

1. Geef de definitie van e^{a+bi} $(a, b \in \mathbb{R})$.
   $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$

2. Formuleer de integraaltest voor convergentie van reeksen. (*Geen bewijs!*)
   Zij f een dalende en naar onder begrensde afbeelding $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$. Noem $I_n := \int_1^n f$. Dan convergeert $\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ als en slechts als de rij $(I_n)_n$ convergeert.

3. Geef de definitie van gelijkmatige convergentie van een rij van functies.
   De rij $(f_n)_n$ (gedefinieerd op de verzameling A) convergeert op A gelijkmatig naar f (ook gedefinieerd op de verzameling A) als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall x \in A)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

4. Formuleer: overdracht van continuïteit bij gelijkmatige convergentie. (*Geen bewijs!*)
   Als $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu zijn in $x_0 \in [a,b]$ en $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ voor zekere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dan is ook f continu in x_0.

5. Geef de definitie van de k-de kernfunctie van Dirichlet.

$$D_k(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{k} \cos nx \quad \text{of} \quad D_k(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

6. Geef de Taylorontwikkeling van $\ln(1+x)$. Vermeld voor welke $x \in \mathbb{R}$ ze geldig is. (*Geen bewijs!*)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$$

Ook goedgekeurd is het geldigheidsgebied $-1 < x < 1$.

III. Actieve bewijzen (4,5 punten)

1. Toon aan:

Stelling (Rijenkenmerk voor limieten). *De eigenschap* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *is gelijkwaardig met: voor elke rij* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *uit* $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ *die naar a convergeert, convergeert de rij van de functiewaarden* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^+}$ *naar* L.

(Stelling 3.1.5 in de cursus.)

2. Toon aan dat voor alle $x > 0$

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

Je mag hierbij zonder bewijs gebruik maken van de rekenregel voor $\ln(xy)$.

(Stelling 7.1.2(6) in de cursus.)

3. Onderzoek het convergentiegedrag van hyperharmonische reeksen (met bewijs).

De hyperharmonische reeks is convergent als $p > 1$ en is divergent naar $+\infty$ als $p \leqslant 1$.
In het bijzonder is de harmonische reeks divergent naar $+\infty$.

(met bewijs zoals in de cursus, zonder bewijs gebruik makend van de integraaltest).

4. Toon aan:

Hulpstelling. *De k-de partieelsom van de Fourierontwikkeling van een 2π-periodieke afbeelding* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is gelijk aan*

$$s_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_k(t)\, dt$$

waarbij D_k *de k-de kernfunctie van Dirichlet is.*

(Hulpstelling 11.2.3 in de cursus.)

IV. Passieve bewijzen (2,5 punten)

1. Beantwoord de vragen:

Toepassing (Regel van de l'Hospital). *Veronderstel dat*

(a) f' *en* g' *bestaan in een open interval* $]a, a+R[$ $(R > 0)$

(b) $f(a+) = g(a+) = 0$

(c) voor alle $a < x < a+R$ *is* $g(x) \neq 0$

(d) voor alle $a < x < a+R$ *is* $g'(x) > 0$.

Dan hebben we:

$$\boxed{\text{Als } \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}, \text{ dan ook } \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.}$$

Bewijs. Zij willekeurig $\varepsilon > 0$. Dan bestaat bij deze $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ met

$$A - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant A + \varepsilon \quad \text{als } a < x < a + \delta < a + R.\text{[1]}$$

Bijgevolg is

$$(A+\varepsilon)g'(x) - f'(x) \geqslant 0 \quad \text{en} \quad f'(x) - (A-\varepsilon)g'(x) \geqslant 0 \quad \text{als } a < x < a + \delta.$$

De functies $(A+\varepsilon)g(x) - f(x)$ en $f(x)-(A-\varepsilon)g(x)$ zijn dus stijgend in $]a, a+\delta[$.[2] Voor elke $x \in]a, a+\delta[$ is dan

$$(A+\varepsilon)g(x)-f(x) \overset{[3]}{\geqslant} (A+\varepsilon)g(a+)-f(a+) = 0 \text{ en } f(x)-(A-\varepsilon)g(x) \geqslant f(a+)-(A-\varepsilon)g(a+) = 0.$$

Hieruit volgt dat $(A+\varepsilon)g(x) \geqslant (A-\varepsilon)g(x)$, en dus dat $g(x) \geqslant 0$. Daardoor is

$$A - \varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant A + \varepsilon.$$

[...] □

[1] Waarom bestaat een $\delta > 0$ met de onderlijnde eigenschap?
De definitie van $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *zegt precies dat bij een gegeven* $\varepsilon > 0$ *zulke* δ *bestaat.*

[2] Formuleer de stelling die toegepast wordt. Geef aan op welke getallen, functies, ... ze hier toegepast wordt, en ga na dat aan de voorwaarden voldaan is om ze toe te passen.
Als f *afleidbaar is in een open interval* I *en* $f'(x) \geqslant 0$ *voor elke* $x \in I$*, dan is* f *stijgend in* I*.*
De stelling wordt hier toegepast op de functie $(A+\varepsilon)g - f$ *en op het interval* $]a, a+\delta[$*. Deze functie is afleidbaar omdat* f *en* g *dat zijn, met afgeleide* $(A+\varepsilon)g' - f'$ *(rekenregels voor som van afleidbare functies en product van een constante met een afleidbare functie).*
Niet goedgekeurd: 'wegens de volgende eigenschap van de positieve afgeleide: als $f'(a) > 0$*, dan bestaat er een* $\delta > 0$ *met de eigenschap: voor alle* $a < x < a + \delta$ *is* $f(x) > f(a)$*').*

[3] Leg uit waarom deze ongelijkheid geldt.
Voor een stijgende functie f *op een open interval* $]a, b[$ *geldt ook dat* $f(a+) \leqslant f(x)$ *voor elke* $x \in]a, b[$*, als* $f(a+)$ *bestaat (opmerking in de cursus). (Men mocht uiteraard ook een van de argumenten herhalen die dit aantonen, hetzij door* f *uit te breiden tot een continue functie in* a*, hetzij door* $\lim_{x\to a+}$ *te nemen in* $f(x) \leqslant f(y)$ *als* $x \leqslant y$*,* $x, y \in]a, b[$*, hetzij door te verwijzen naar de middelwaardestelling.) Hier wordt dit toegepast op de stijgende functie* $(A+\varepsilon)g - f$*.*

2. Beantwoord de vragen:

Stelling. *Is* f *over* $]a, b[$ *continu en begrensd, dan is* f *integreerbaar over* $]a, b[$*.*

Bewijs. Stel $|f(x)| \leqslant K$ voor alle $x \in I$.[4] We nemen een willekeurige $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Over het compact interval $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ is f gelijkmatig continu.[5] Er bestaat dus een δ_ε met de eigenschap dat $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ voor alle punten x en x' uit $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ waarvoor $|x - x'| < \delta_\varepsilon$. Verdeel het interval $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ in een aantal (stel N) intervallen met een gelijke lengte $L < \delta_\varepsilon$, en bekijk de partitie π van $]a, b[$ met als opeenvolgende deelpunten

$$a < a + \varepsilon < a + \varepsilon + L < a + \varepsilon + 2L < \cdots < a + \varepsilon + NL = b - \varepsilon < b.$$

Hiervoor is

$$\begin{aligned} S_\pi - s_\pi &\overset{[6]}{=} \left(\sup_{]a,a+\varepsilon[} f - \inf_{]a,a+\varepsilon[} f \right)\varepsilon + \left(\sup_{]b-\varepsilon,b[} f - \inf_{]b-\varepsilon,b[} f \right)\varepsilon \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N} \left(\sup_{]a+\varepsilon+(k-1)L,a+\varepsilon+kL[} f - \inf_{]a+\varepsilon+(k-1)L,a+\varepsilon+kL[} f \right) L \end{aligned}$$

In de eerste en de laatste term is

$$\sup_{\cdots} - \inf_{\cdots} \overset{[7]}{\leqslant} 2K.$$

In elk van de overige termen is

$$\sup_{\cdots} - \inf_{\cdots} \overset{[8]}{\leqslant} \varepsilon$$

want, doordat het beschouwde interval een lengte $L < \delta_\varepsilon$ heeft, is $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ voor alle x, x' in het interval. Zo hebben we bij de gegeven $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ een partitie π gevonden met

$$S_\pi - s_\pi \leqslant 4K\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} L < \varepsilon(4K + b - a) =: \varepsilon'[9, 10].$$

□

[4] Waarom kunnen we dit veronderstellen?
Het feit dat f begrensd is drukt juist uit dat zulke K bestaat.

[5] Formuleer de stelling die toegepast wordt. Geef aan op welke getallen, functies, ... ze hier toegepast wordt, en ga na dat aan de voorwaarden voldaan is om ze toe te passen.
Een continue functie over een compact interval $I = [a, b]$, is gelijkmatig continu over I (stelling van Heine). De stelling wordt hier toegepast op de functie f (continu door het gegeven) en het interval $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ (klaarblijkelijk compact).

[6] Geef de definitie van S_π en s_π, en leg de gelijkheid uit.
Voor een partitie die bestaat uit punten $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zijn de bovensom, resp. ondersom

$$S_\pi = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\ell_k, \quad s_\pi = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\ell_k$$

met

$$\ell_k = x_k - x_{k-1}, \quad M_k(f) = \sup_{]x_{k-1}, x_k[} f, \quad m_k(f) = \inf_{]x_{k-1}, x_k[} f.$$

Dan is dus

$$S_\pi - s_\pi = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{]x_{k-1}, x_k[} f - \inf_{]x_{k-1}, x_k[} f \Big) \ell_k.$$

In het huidige geval is $\ell_k = \varepsilon$ voor het eerste en laatste interval, $\ell_k = L$ voor de andere intervallen van de partitie.

[7] Leg de ongelijkheid uit.
Omdat $f(x) \leqslant K$ voor elke $x \in]a, b[$, is ook $\sup_{\ldots} f \leqslant K$, en omdat $f(x) \geqslant -K$ voor elke $x \in]a, b[$, is ook $\inf_{\ldots} f \geqslant -K$, zodat $\sup_{\ldots} f - \inf_{\ldots} f \leqslant 2K$.

[8] Leg de ongelijkheid uit.
Zoals in de tekst aangegeven, volgt uit de gelijkmatige continuïteit en $L < \delta_\varepsilon$ dat $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$ voor elke x, x' in het beschouwde interval I_k van de partitie. De ongelijkheid volgt dan wegens de eigenschap van supremum en infimum dat $|f(x) - f(x')| \leqslant C$ voor elke $x, x' \in A$ impliceert dat $\sup_A f - \inf_A f \leqslant C$.

[9] Moeten we niet aantonen dat $S_\pi - s_\pi \leqslant \varepsilon$? Waarom mogen we ε' gebruiken i.p.v. ε?
We willen aantonen dat voor gelijk welke (voldoende kleine) $\varepsilon > 0$ een partitie π bestaat waarvoor $S_\pi - s_\pi \leqslant \varepsilon$ (zie [10]). Als deze eigenschap geldt voor elk getal $(4K + b - a)\varepsilon$ met $\varepsilon > 0$ willekeurig (maar voldoende klein)), dan geldt ze ook ook voor elk (voldoende klein) getal $\varepsilon > 0$ (m.a.w., omdat $\{\varepsilon(4K + b - a) : \varepsilon > 0\} = \mathbb{R}^+$). Of, m.a.w.: we moeten maar de redenering herhalen startend van $\varepsilon/(4K + b - a)$ i.p.v. ε om uit te komen dat $S_\pi - s_\pi \leqslant \varepsilon$.
Niet goedgekeurd: 'omdat ook $\varepsilon' > 0$ is als $\varepsilon > 0$', of gelijk welk argument dat toelaat dat het ook volstaat om aan te tonen dat $S_\pi - s_\pi \leqslant 1 + \varepsilon$, met $\varepsilon > 0$ willekeurig.

[10] Hoe volgt het gevraagde hieruit?
Wegens het kenmerk van Darboux is f integreerbaar op $]a, b[$ zodra f op $]a, b[$ begrensd is en er voor elke $\varepsilon > 0$ een partitie π van $]a, b[$ bestaat waarvoor $S_\pi - s_\pi \leqslant \varepsilon$.
Niet goedgekeurd: 'door de definitie van integreerbaarheid', 'omdat in de limiet $S_\pi = s_\pi$'.