

# Examen Functieruimten - Deel theorie

15 januari 2016, 08:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

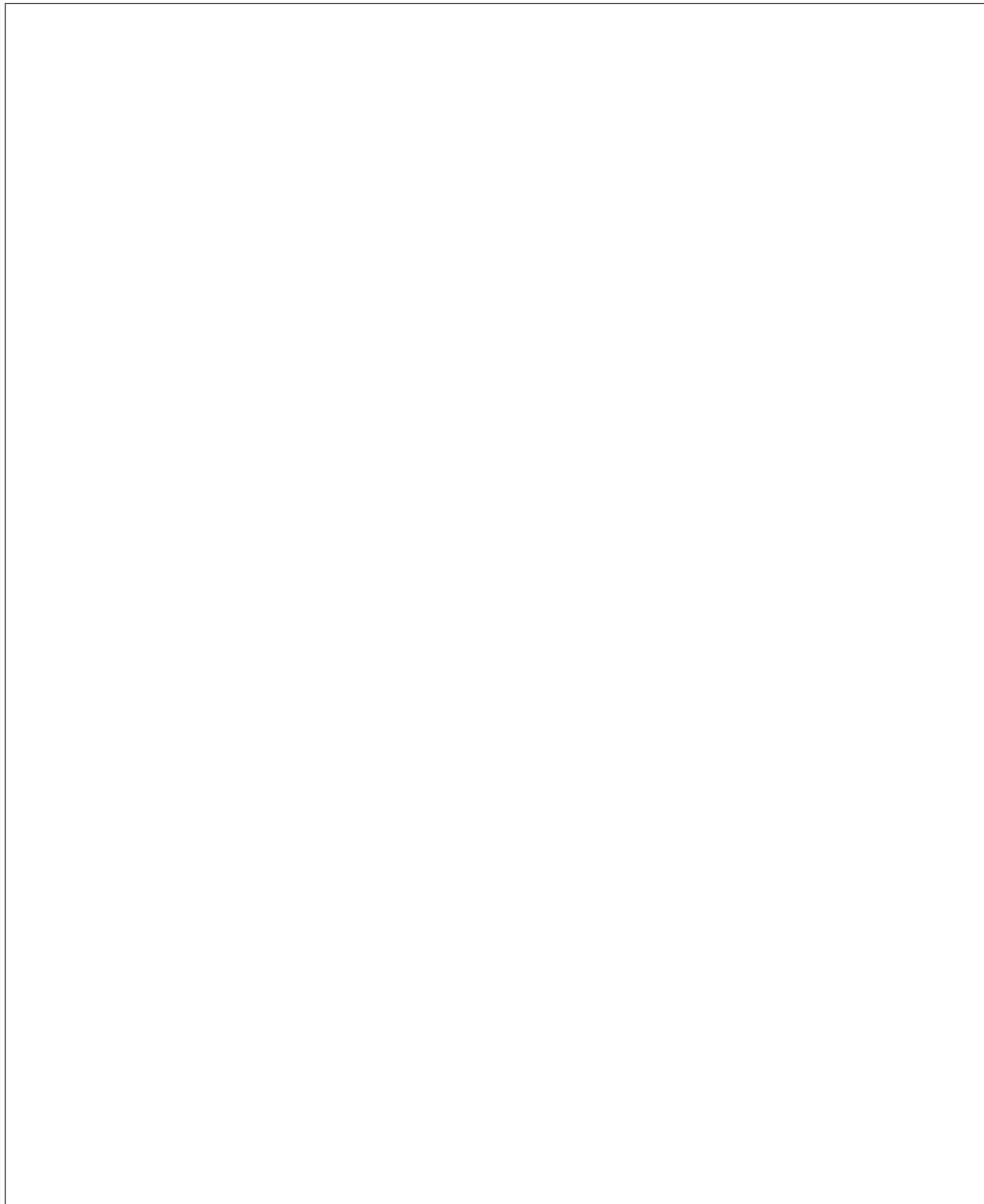
- (i) Naam en voornaam hierboven invullen.
- (ii) Nietje niet losmaken.
- (iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.
- (iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.
- (v) Respecteer de antwoordvakken.
- (vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.
- (vii) Speciaal voor de waar-of-vals vragen: doorstreep het foute antwoord; indien de bewering WAAR is: geef een bewijs (zie ook (vi)); indien VALS geef indien mogelijk een tegenvoorbeeld of motiveer omstandig; enkel indien de motivering correct is, wordt het antwoord goed bevonden. Respecteer telkens het antwoordvak (zie ook (v)).
- (viii) De waar-vals vragen staan op 4 punten, de twee open vragen op 6 punten. Met de bonusvraag kan u 1 punt extra verdienen.

- vraag 1: WAAR of VALS

De afbeelding

$$T(\phi) = \sum_{n=1}^m a_n \phi(x_n), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

waarbij  $a_n \in \mathbb{R}$  en  $x_n \in \mathbb{R}$  definieert een distributie in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .



- vraag 2: WAAR of VALS

Zij  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  een even functie. Dan is ook  $\mathcal{F}^\pm(f)$  even en er geldt:

$$\mathcal{F}^\pm(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

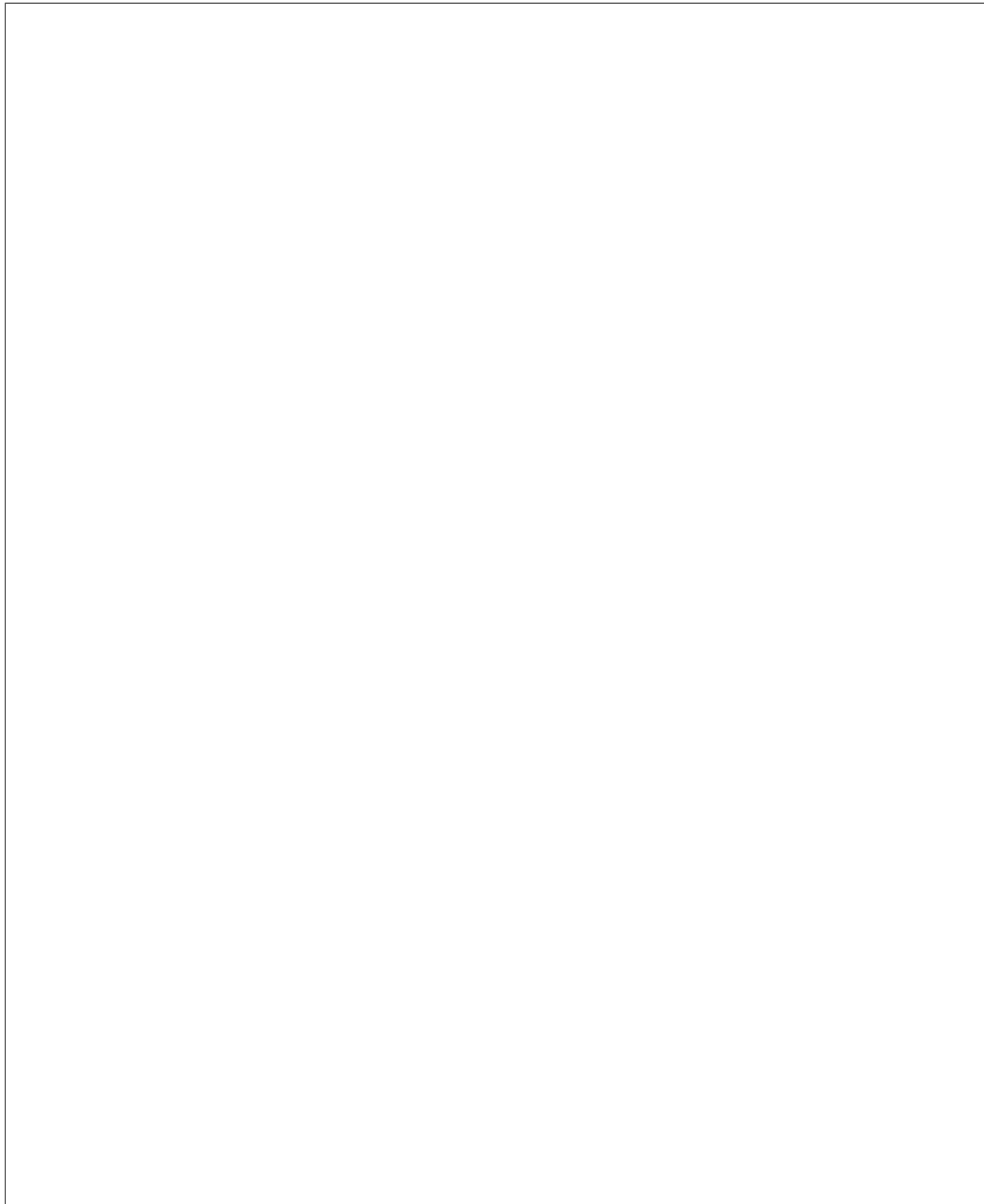


- vraag 3: WAAR of VALS

De vectorruimte  $\mathbb{C}^m$  voorzien van de norm

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad x = (x_1, \dots, x_m)$$

is geen hilbertruimte.



• vraag 4: WAAR of VALS

In distributionele zin geldt dat

$$\frac{d}{dx} (f(x)) = Y(x)$$

met

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

en  $Y(x)$  de Heaviside distributie.

• vraag 5: Zij  $H$  een hilbertruimte,  $y$  en  $z$  vast maar willekeurig in  $H$  en beschouw de operator

$$T(x) = \langle x, z \rangle y.$$

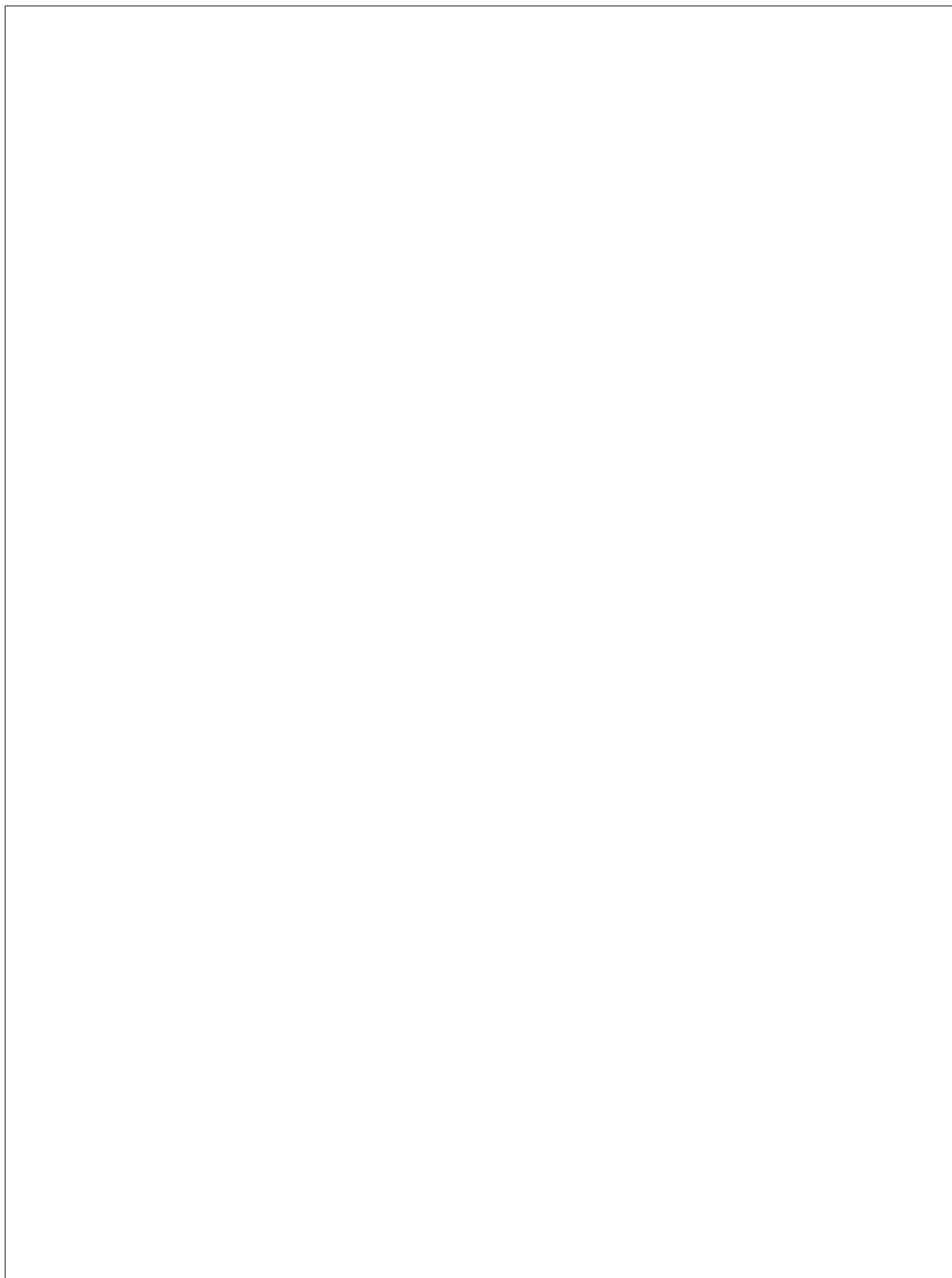
(i) Bepaal  $T^*$ .



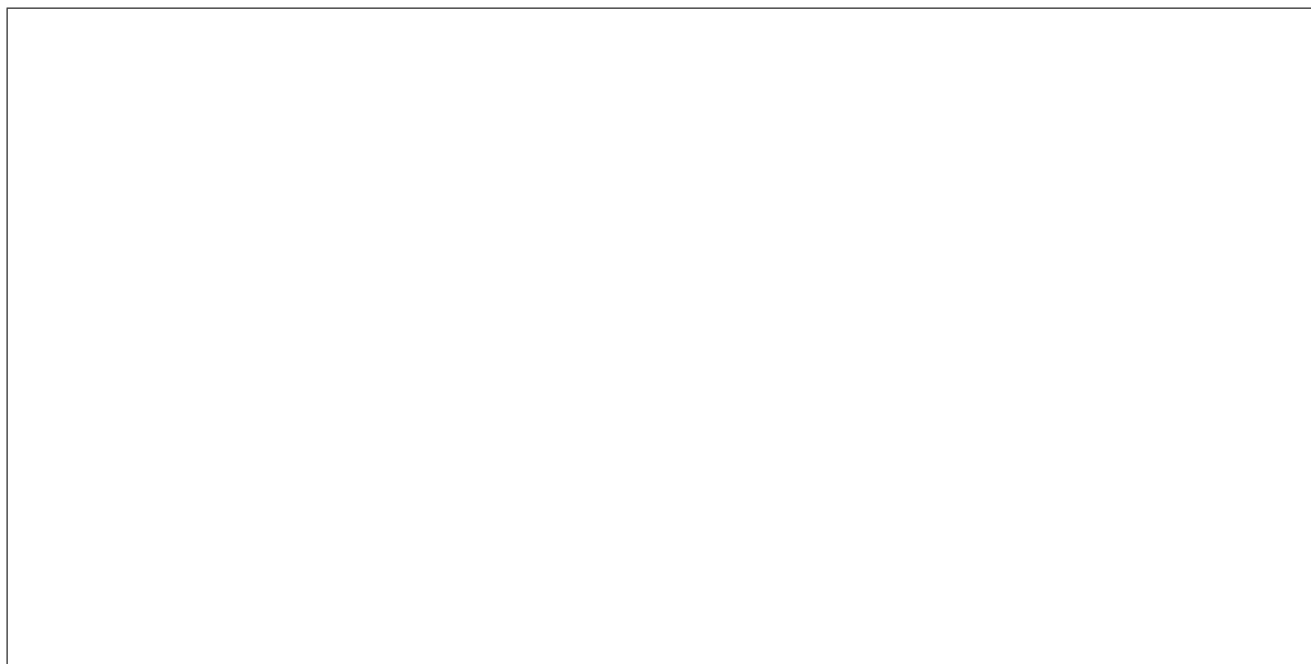
(ii) Bewijs dat  $T^2 = \lambda T$  en bepaal  $\lambda$ .



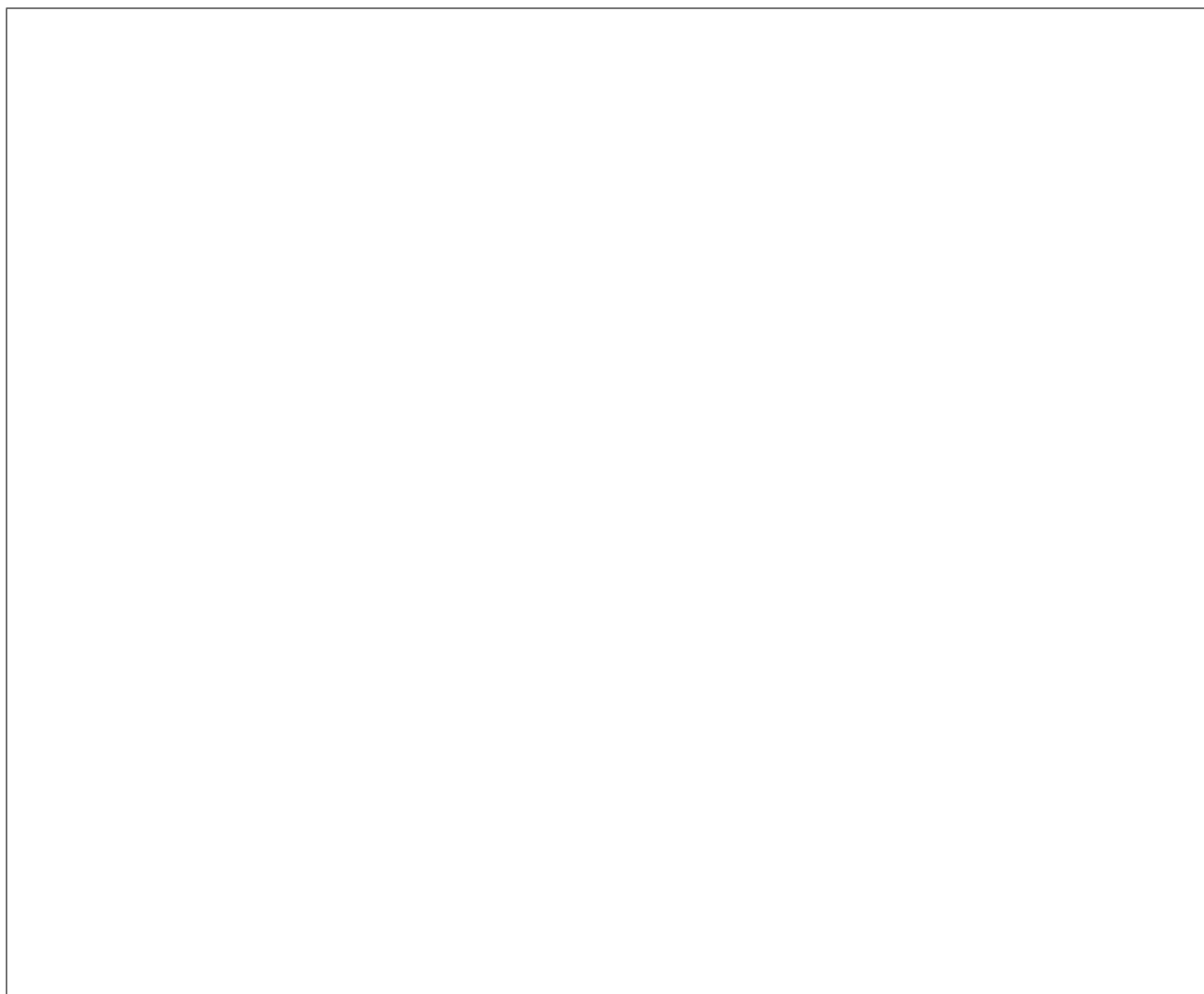
(iii) Bepaal  $\|T\|$ .



(iv) Wanneer is  $T^* = T$ ? Geef een nodige en voldoende voorwaarde!



(v) Bepaal alle eigenwaarden en eigenruimten van  $T$ .





• vraag 6: (i) Zij  $H$  een complexe hilbertruimte en  $T : H \rightarrow H$  een begrensde lineaire operator. Als

$$\langle x, T(x) \rangle = 0, \quad \forall x \in H$$

bewijs dan dat  $T = 0$ .

Hint: construeer met behulp van  $T$  twee zelftoegevoegde operatoren.

(ii) Geef een algemene definitie voor een inproductruimte en een hilbertruimte over het veld van de *reële* getallen. Blijft voorgaande bewering (vraag 6 (i)) waar voor reële hilbertruimten? Motiveer!

• Bonusvraag: bewijs volgende stelling. Zij  $1 \leq p < r < q < \infty$  en veronderstel  $f \in L^p \cap L^q$  met  $f \neq 0$ . Dan is  $f \in L^r$  en er geldt:

$$\ln \|f\|_r \leq \alpha \ln \|f\|_p + (1 - \alpha) \ln \|f\|_q$$

waarbij

$$\alpha = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Hint: gebruik de ongelijkheid van Hölder.

# Examen Functieruimten - Deel oefeningen

15 januari 2016, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

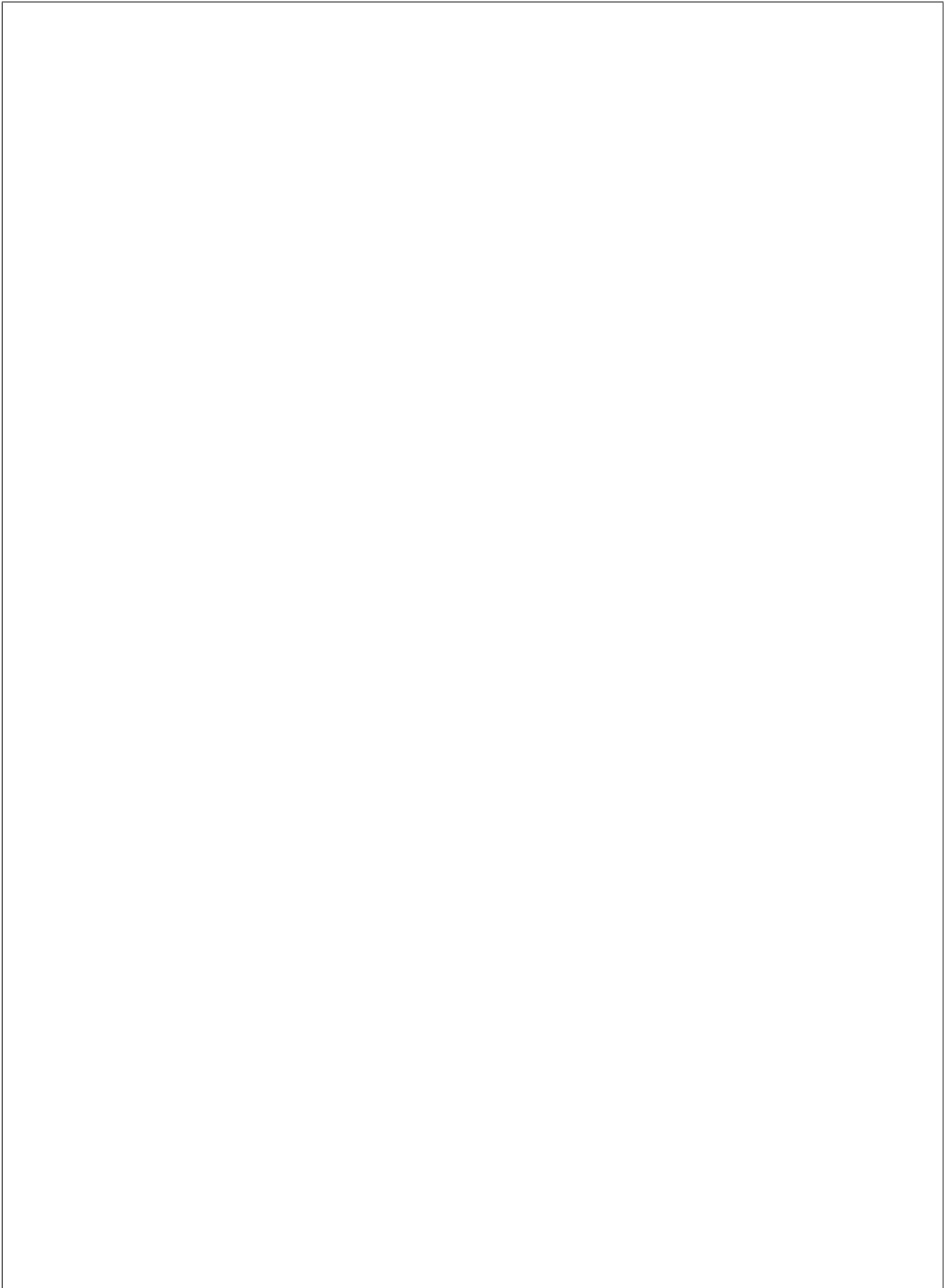
- (i) Naam en voornaam hierboven invullen.
- (ii) Nietje niet losmaken.
- (iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.
- (iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.
- (v) Respecteer de antwoordvakken.
- (vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

- Oefening 1

We werken in  $\mathbb{R}$ . Je mag gebruiken dat, voor  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

1.a Bereken rechtstreeks  $\mathcal{F}^{\pm}\left(\sin(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)$ .



1.b Je mag er nu vanuit gaan dat

$$\mathcal{F}^{\pm} \left( \sin(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = \frac{\pm i}{2} \left( \exp\left(-\frac{1}{2}(y-a)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(y+a)^2\right) \right). \quad (1)$$

Opgelet: je mag dit niet gebruiken als startpunt voor puntje (a)!

Bepaal *met behulp van (1)* de Fouriergetransformeerde van  $\cos(ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ .

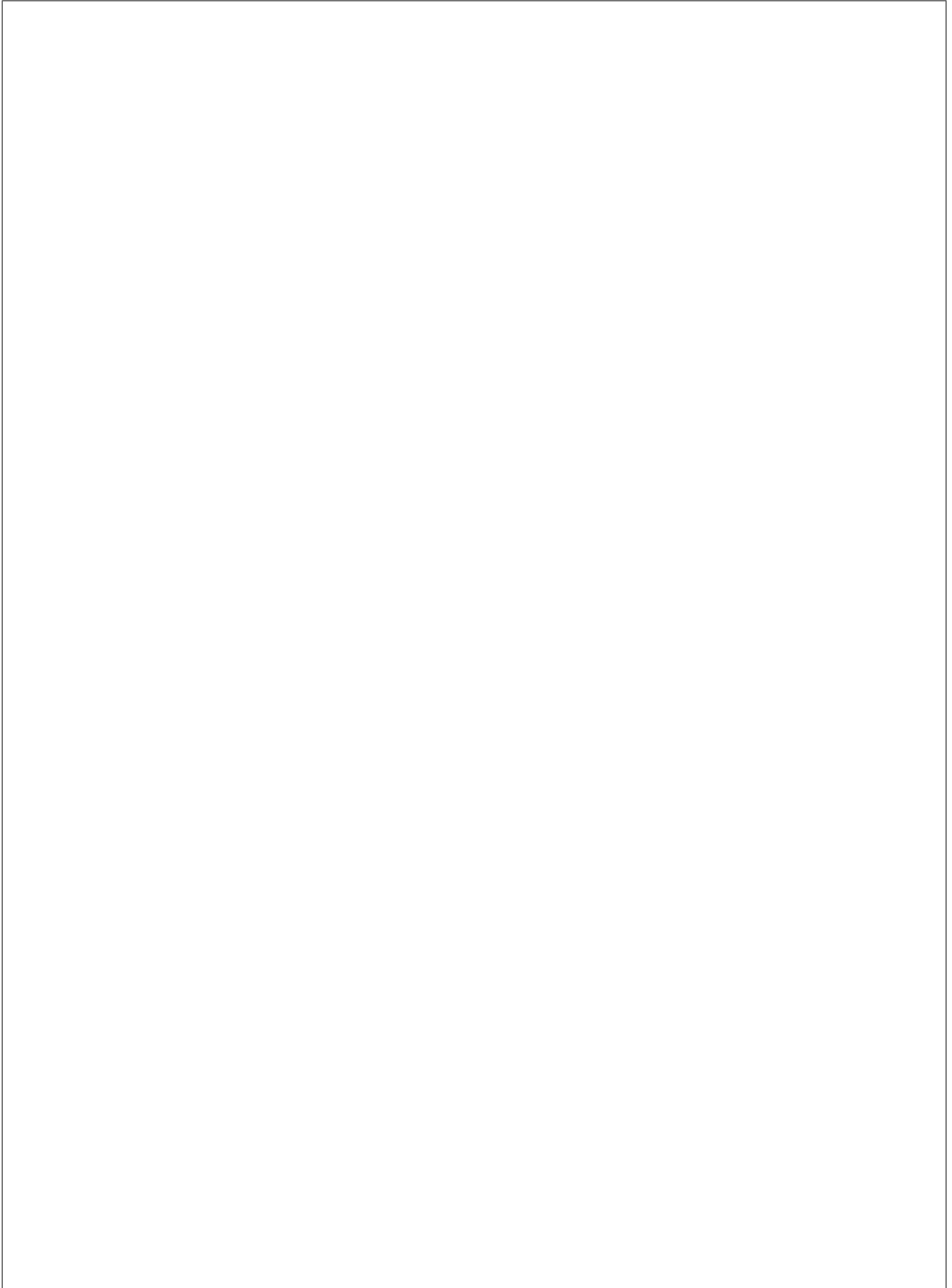
1.c Bepaal, door middel van Fouriertransformatie, een functie  $f$  zodanig dat

$$\left(f * \sqrt{2\pi} \exp(-x^2)\right)(y) = \cos(ay) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Maak eventuele veronderstellingen duidelijk en controleer deze!



Vervolg Oefening 1.c



- Oefening 2. We werken in één dimensie.

2.a Herschrijf in  $\mathcal{D}^*$  de distributie  $\cos(ax) \delta^{(2k)}$ , waarbij  $k \in \mathbb{N}$  en  $a \in \mathbb{R}$ , als een som van de vorm

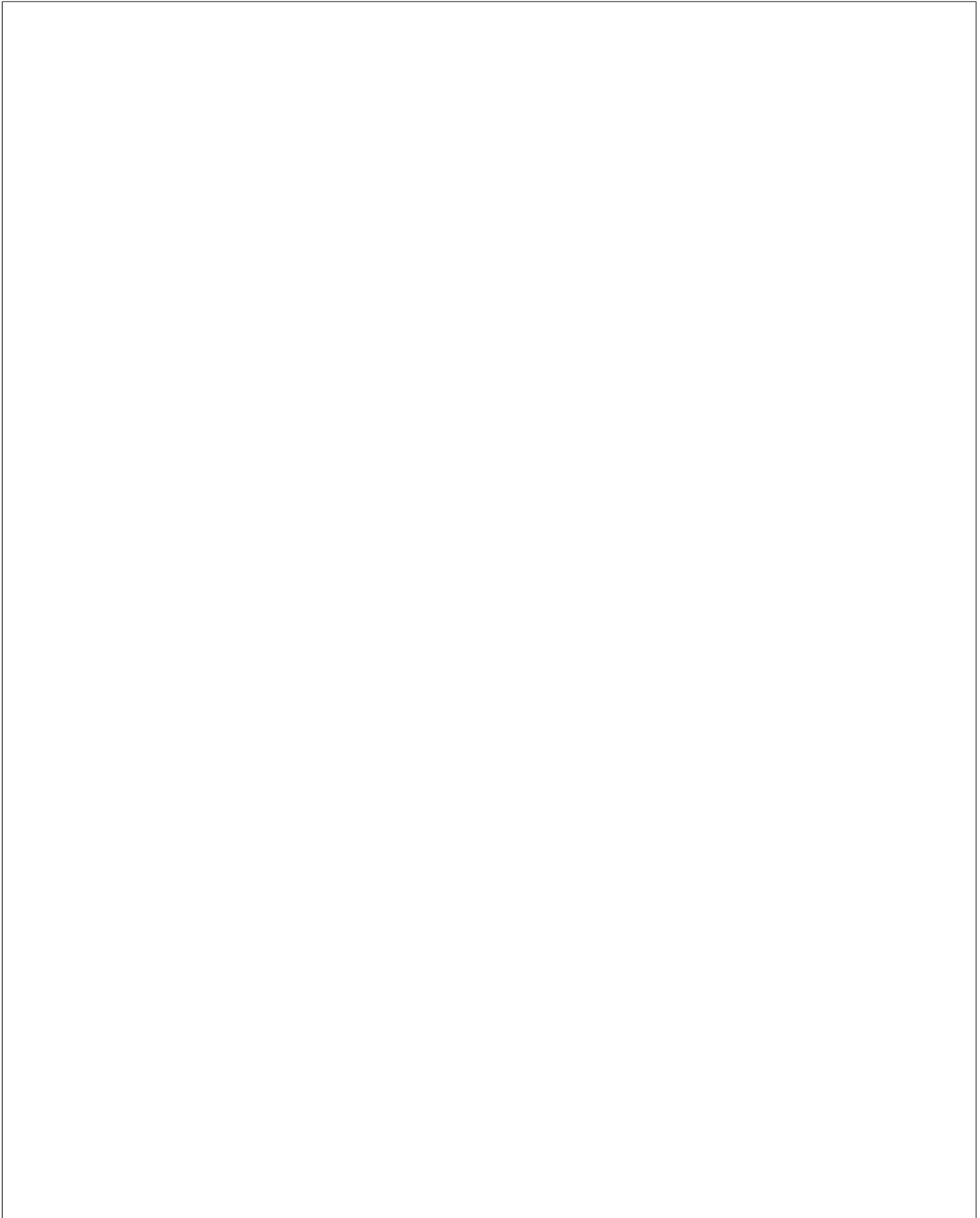
$$\sum_j c_j \delta^{(j)}.$$

Bepaal  $c_j \in \mathbb{R}$  expliciet.

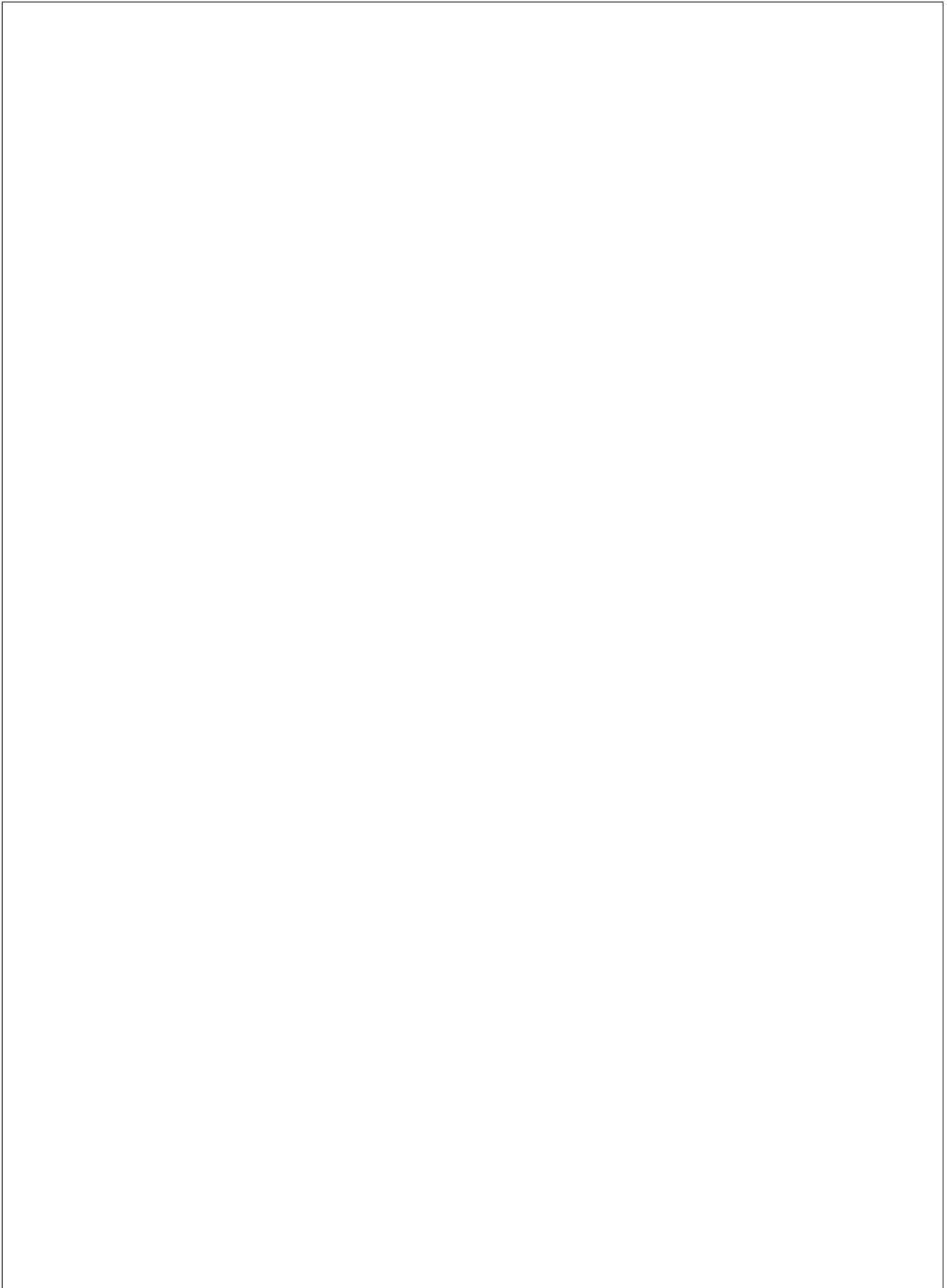
2.b Beschouw  $\cos(ax) \delta^{(2)} = -a^2 \delta + \delta^{(2)}$ . Ga na dat (in distributionele zin)

$$\cos(ax) \delta^{(2)} * \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$$

goed gedefinieerd is en werk deze convolutie uit. Hierbij is  $\operatorname{sgn}(x) = +1$  als  $x > 0$ ,  $0$  als  $x = 0$  en  $-1$  als  $x < 0$ .



Vervolg Oefening 2.b



2.c Neem nu  $a = 1$ . Toon aan dat  $\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$  getemperd is en bepaal, met behulp van 2.b, de Fouriergetransformeerde van  $\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$ .