Examen Functieruimten - Deel theorie

15 januari 2016, 08:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

(i) Naam en voornaam hierboven invullen.

(ii) Nietje niet losmaken.

(iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.

(iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.

(v) Respecteer de antwoordvakken.

(vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

(vii) Speciaal voor de waar-of-valsvragen: doorstreep het foute antwoord; indien de bewering WAAR is: geef een bewijs (zie ook (vi)); indien VALS geef indien mogelijk een tegenvoorbeeld of motiveer omstandig; enkel indien de motivering correct is, wordt het antwoord goed bevonden. Respecteer telkens het antwoordvak (zie ook (v)).

(viii) De waar-vals vragen staan op 4 punten, de twee open vragen op 6 punten. Met de bonusvraag kan u 1 punt extra verdienen.

- vraag 1: WAAR of VALS

De afbeelding

$$T(\phi) = \sum_{n=1}^{m} a_n \phi(x_n), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

waarbij $a_n \in \mathbb{R}$ en $x_n \in \mathbb{R}$ definieert een distributie in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

- vraag 2: WAAR of VALS

Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ een even functie. Dan is ook $\mathcal{F}^{\pm}(f)$ even en er geldt:

$$\mathcal{F}^{\pm}(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos(x\xi) d\xi.$$

- vraag 3: WAAR of VALS

De vectorruimte $\mathbb{C}^m$ voorzien van de norm

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^3\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m)$$

is geen hilbertruimte.

- vraag 4: WAAR of VALS

In distributionele zin geldt dat

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = Y(x)$$

met

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

en $Y(x)$ de Heaviside distributie.

• vraag 5: Zij H een hilbertruimte, y en z vast maar willekeurig in H en beschouw de operator

$$T(x) = \langle x, z \rangle y.$$

(i) Bepaal T^*.

(ii) Bewijs dat $T^2 = \lambda T$ en bepaal λ.

(iii) Bepaal $\|T\|$.

(iv) Wanneer is $T^* = T$? Geef een nodige en voldoende voorwaarde!

(v) Bepaal alle eigenwaarden en eigenruimten van T.

• vraag 6: (i) Zij H een complexe hilbertruimte en $T : H \to H$ een begrensde lineaire operator. Als

$$\langle x, T(x) \rangle = 0, \qquad \forall x \in H$$

bewijs dan dat $T = 0$.

Hint: construeer met behulp van T twee zelftoegevoegde operatoren.

(ii) Geef een algemene definitie voor een inproductruimte en een hilbertruimte over het veld van de *reële* getallen. Blijft voorgaande bewering (vraag 6 (i)) waar voor reële hilbertruimten? Motiveer!

• Bonusvraag: bewijs volgende stelling. Zij $1 \leq p < r < q < \infty$ en veronderstel $f \in L^p \cap L^q$ met $f \neq 0$. Dan is $f \in L^r$ en er geldt:

$$\ln \|f\|_r \leq \alpha \ln \|f\|_p + (1-\alpha) \ln \|f\|_q$$

waarbij

$$\alpha = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Hint: gebruik de ongelijkheid van Hölder.

Examen Functieruimten - Deel oefeningen

15 januari 2016, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

(i) Naam en voornaam hierboven invullen.

(ii) Nietje niet losmaken.

(iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.

(iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.

(v) Respecteer de antwoordvakken.

(vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

- Oefening 1

We werken in $\mathbb{R}$. Je mag gebruiken dat, voor $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(a\,x)\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \sqrt{2\,\pi}\,\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

1.a Bereken rechtstreeks $\mathcal{F}^{\pm}\left(\sin(a\,x)\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)$.

Vervolg Oefening 1.a

1.b Je mag er nu vanuit gaan dat

$$\mathcal{F}^{\pm}\left(\sin(a\,x)\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) = \frac{\pm\, i}{2}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(y-a)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(y+a)^2\right)\right). \tag{1}$$

Opgelet: je mag dit niet gebruiken als startpunt voor puntje (a)!

Bepaal *met behulp van (1)* de Fouriergetransformeerde van $\cos(a\,x)\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1.c Bepaal, door middel van Fouriertransformatie, een functie f zodanig dat

$$\left(f * \sqrt{2\pi}\,\exp(-x^2)\right)(y) = \cos(a\,y)\,\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Maak eventuele veronderstellingen duidelijk en controleer deze!

Vervolg Oefening 1.c

- Oefening 2. We werken in één dimensie.

2.a Herschrijf in $\mathcal{D}^*$ de distributie $\cos(a\,x)\,\delta^{(2k)}$, waarbij $k \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$, als een som van de vorm

$$\sum_j c_j \delta^{(j)}.$$

Bepaal $c_j \in \mathbb{R}$ expliciet.

2.b Beschouw $\cos(a\,x)\,\delta^{(2)} = -a^2\,\delta + \delta^{(2)}$. Ga na dat (in distributionele zin)

$$\cos(a\,x)\,\delta^{(2)} * \operatorname{sgn}(x)\,e^{-|x|}$$

goed gedefinieerd is en werk deze convolutie uit. Hierbij is $\operatorname{sgn}(x) = +1$ als $x > 0$, 0 als $x = 0$ en -1 als $x < 0$.

Vervolg Oefening 2.b

2.c Neem nu $a = 1$. Toon aan dat $\operatorname{sgn}(x)\, e^{-|x|}$ getemperd is en bepaal, met behulp van 2.b, de Fouriergetransformeerde van $\operatorname{sgn}(x)\, e^{-|x|}$.