Examen “Kwantummechanica 1” (11 januari 2016)

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig, gevat en toch compleet!

1. THEORIE VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Bereken het resultaat van de volgende uitdrukking:

     $$\left[p_y^2, y^3\right] \psi_n(\vec{r}\ ) \ ,$$

     waarbij $\psi_n(\vec{r}\ )$ een niet nader gespecifieerde oplossing is van de TISE voor een deeltje met massa m dat in drie dimensies beweegt onder invloed van een potentiaal $V(\vec{r}\ )$.

   - Een deeltje beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal van het type “oneindige vierkante put” met breedte a (ter herinnering: $V(x) = 0$ voor $0 \leq x \leq a$ en $V(x) = +\infty$ voor de andere waarden van x). De stationaire toestanden van dit systeem worden gegeven door

     $$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad\qquad n = 1, 2, 3, \ldots, +\infty \ \ .$$

     (a) Gebruik het oscillatietheorema om de energie-eigenwaarden van het systeem te bepalen.

     (b) Veronderstel dat op $t = 0$ de golffunctie van het systeem gegeven wordt door $\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$. Bepaal de positiewaarschijnlijkheidsdichtheid op een arbitrair tijdstip t.

     (c) Veronderstel dat op $t = 0$ de golffunctie van het systeem gegeven wordt door

     $$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{7}}\psi_1(x) + i\sqrt{\frac{5}{7}}\psi_3(x)$$

     Bereken de verwachtingswaarde van de energie van het systeem.

     (d) Veronderstel dat het deeltje zich in de stationaire toestand $\psi_1(x)$ bevindt en dat op $t = 0$ de breedte van de put verdubbeld wordt (de put bevindt zich dus in het gebied $0 \leq x \leq 2a$). De verandering van de breedte van de put is zo dat het deeltje zijn golffunctie niet kan wijzigen tijdens de wijziging van de potentiaal. Welke van de volgende vijf verklaringen zijn juist? Duid je antwoorden (voor een antwoord zonder duiding krijg je geen punten)

       i. De golffunctie van het deeltje zal $\psi_1(x)$ (eigenfunctie van de oorspronkelijke put) blijven voor alle $t > 0$.

ii. De golffunctie van het deeltje zal evolueren naar de grondtoestandsgolffunctie van een put met breedte $2a$ en zal daarna in die toestand blijven.
iii. De golffunctie van het deeltje zal evolueren naar de golffunctie voor de eerste aangeslagen toestand van een put met breedte $2a$ en zal daarna in die toestand blijven.
iv. De positiewaarschijnlijkheidsdichtheid van het deeltje zal wijzigen met de tijd voor alle $t > 0$.
v. Geen enkele van de bovenstaande beweringen is correct.

2. THEORIE VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen "Kwantummechanica 1": 11 januari 2016

OEFENINGEN (20 punten)

- Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen ENKE: gebruikt worden
  1. de cursusnota's (TRANSPARANTEN)
  2. het handboek "Quantum Mechanics" van Bransden en Joachain
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison

Oefening 1 (10 punten): Deeltje in een "mystery potential"

De genormeerde golffunctie $\Psi(x,t)$ van een deeltje met massa m dat beweegt onder de invloed van een potentiaal $V(x)$ wordt gegeven door

$$\Psi(x,t) = \left\{ \begin{array}{cc} xe^{-Bx}e^{-\frac{i}{\hbar}Ct} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

waarbij B en C twee reële constanten zijn.

1. Maak een schets van de golffunctie $\Psi(x, t = 0)$ waarbij je alle relevante kenmerken duidelijk aangeeft.
2. Gebruik je kennis van $\Psi(x,t)$ om een KWALITATIEVE schets van de potentiaal $V(x)$ te maken. De schets moet duidelijk tonen waar de "klassieke verboden gebieden" en de "klassieke keerpunten" zich bevinden.
3. Bereken de verwachtingswaarde van de energie van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
4. Bereken de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
5. Bereken de verwachtingswaarde van de impuls van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
6. Kun je voor het beschouwde systeem energie-eigentoestanden met een energie groter of kleiner dan de energie verwachtingswaarde horend bij $\Psi(x,t)$ verwachten?

7. Bepaal de potentiaal $V(x)$ in termen van de variabelen $(B, C, m, \hbar)$ en bepaal de waarde van B. Komt je resultaat overeen met de kwalitatieve schets voor $V(x)$ die je eerder maakte?

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Een deeltje in een één-dimensionale harmonische oscillator bevindt zich op $t = 0$ in de toestand

$$\Psi(x, t = 0) = \alpha\psi_0(x) + \beta\psi_1(x) ,$$

waarbij $\psi_0(x)$ ($\psi_1(x)$) de golffunctie is horend bij de grondtoestand (eerste aangeslagen toestand).

1. Bepaal de waarden van α en β zodanig dat op $t = 0$ de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ zo groot mogelijk wordt.

2. Construeer $\Psi(x, t)$ en $|\Psi(x, t)|^2$ voor een arbitrair tijdstip $t > 0$. Beschrijf bij vaste x de tijdsafhankelijkheid van de $|\Psi(x, t)|^2$.

3. Als men op een arbitrair tijdstip t de energie van dit deeltje meet, welke waarden kan men dan vinden en met welke waarschijnlijkheid?

4. Bereken EXPLICIET de verwachtingswaarden $\langle x \rangle$, $\langle p_x \rangle$ en $\left\langle \frac{dV(x)}{dx} \right\rangle$ op een arbitrair tijdstip t, en toon aan dat wel degelijk voldaan is aan het Ehrenfest theorema

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{dV(x)}{dx} \right\rangle .$$