Examen Projectieve Meetkunde (Theorie), 26 januari 2016

Deel I

(1) Onderstel dat V een 2-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$ en dat a_1, a_2, a_3, a_4 verschillende punten van $\mathrm{PG}(V)$ zijn. Wanneer wordt a_4 harmonisch toegevoegd genoemd aan a_3 ten opzichte van a_1 en a_2? Toon aan dat a_3, a_4 harmonisch toegevoegd zijn ten opzichte van a_1, a_2 als en slechts als er een element van de orde 2 in $PGL(V)$ bestaat die a_1 en a_2 fixeert en a_3 en a_4 omwisselt.

(2) Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie tenminste 3 over een veld $\mathbb{F}$ en dat α een automorfisme is van $\mathrm{PG}(V)$ dat alle punten van een bepaald hypervlak W fixeert. Toon aan dat er een punt bestaat met de eigenschap dat elke rechte erdoor gefixeerd wordt. Hoe wordt een dergelijk automorfisme α genoemd?

(3) Onderstel dat V een 4-dimensionale vectorruimte over een veld $\mathbb{F}$ is. Geef de definitie van stralenveld en stralenschoof van $\mathrm{PG}(V)$. Onderstel dat $\mathcal{L}$ een stralenveld of stralenschoof is. Toon dan aan dat de verzameling punten van $\mathrm{PG}(\bigwedge^2 V)$ die met $\mathcal{L}$ correspondeert (via de Kleincorrespondentie) een vlak is.

(4)
- Beschouw een niet-ledige absoluut irreduciebele kegelsnede C in een vlak $\mathrm{PG}(V)$ over een veld van karakteristiek 2. Noem $\mathcal{P}$ de verzameling punten van $\mathrm{PG}(V)$ die bevat zijn in tenminste 2 raaklijnen. Hoe groot is de verzameling $\mathcal{P}$? Als L een rechte is die met $\mathcal{P}$ een punt gemeen heeft, in hoeveel punten kan L de kegelsnede C dan snijden?
- Geef de definitie van een geraamte van een projectieve ruimte.
- Geef zonder bewijs de fundamentaalstelling van de projectieve meetkunde.
- Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie tenminste 2 over een veld $\mathbb{F}$. Geef de definitie van de projectieve en de kleine projectieve groep van $\mathrm{PG}(V)$. Als $V = V(n, q)$, geef dan nodige en voldoende voorwaarden opdat beide groepen evenveel elementen zouden bevatten.

Deel II

(1) Definieer het begrip *affien vlak*. Toon aan dat je rechten steeds kan zien als puntenverzamelingen. Definieer daartoe eerst het begrip *isomorfisme* (tussen affiene vlakken), en gebruik deze notie.

(2) Onderstel dat $\mathcal{P}$ een projectief vlak is. Voer coördinaten in voor de punten van $\mathcal{P}$ (dus *niet* voor de rechten!). (Voeg een verklarende tekening toe!)

(3) Als een automorfisme van een projectief vlak een rechte L puntsgewijs vasthoudt en tevens twee punten u en v niet op L fixeert, dan is het de identiteit. Bewijs deze bewering.

(4) Onderstel dat $\mathcal{P}$ een eindig projectief vlak is van de orde n, met n de macht van een priemgetal. Onderstel dat U een rechte is van $\mathcal{P}$, en dat A een automorfismegroep is van $\mathcal{P}$ die U puntsgewijs vasthoudt, en die de orde n^2 heeft. Bewijs dat $\mathcal{P}$ een translatievlak is met translatiegroep A en translatierechte U. (HINT: gebruik deel (c).)