1ste Ba Fysica-Sterrenkunde – 24.8.2016
Analyse II

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Vraag I.

1. Definieer (i) eenvoudig gebied van $\mathbb{R}^3$; (ii) $(\partial E)_+$ voor een eenvoudig gebied $E \subset \mathbb{R}^3$.
2. Formuleer (geen bewijs) de 'Divergentiestelling'.
3. Notoer $\frac{\mathbf{1}_{\text{rad}}}{\|\mathbf{r}\|^2}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$ voor $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Bewijs dat
$$\iint_{\partial E} \frac{\mathbf{1}_{\text{rad}}}{\|\mathbf{r}\|^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$
als het eenvoudig gebied E de oorsprong niet bevat.
4. Bewijs de volgende stelling. Maak ook een figuur.
Stelling. *Zij Σ een stervormig oppervlak, en stel dat de kegel, gevormd door de halfrechten uit de oorsprong die Σ snijden, op de sfeer $x^2+y^2+z^2=R^2$ een oppervlak Σ' uitsnijdt. Dan is* $\iint_\Sigma \frac{\mathbf{1}_{\text{rad}}}{\|\mathbf{r}\|^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\text{opp}(\Sigma')}{R^2}$.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag II.

1. Definieer (i) compacte verzameling; (ii) open gebied; (iii) gebied.
2. Formuleer (geen bewijs) de stelling van 'Heine-Borel'.
3. Formuleer en bewijs de 'Middelwaardestelling' voor functies van twee veranderlijken (voor afgeleiden).

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag III.

1. (a) Geef de 'matrixvorm' van de kettingregel (enkel de formule, geen bewijs).
   (b) Zij $\mathbf{f}$ een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^m$ lineaire afbeelding met matrixvoorstelling A. Bereken (= geef de formule) $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ in elk punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
2. Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):
   (a) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2}$.
   (b) Als f van klasse C^1 is op heel $\mathbb{R}$, f' begrensd is op heel $\mathbb{R}$ en $|f(x)|$ gemajoreerd wordt door $\frac{1}{x^2}$ op $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$, dan is $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} \hat{f}(\omega)\, d\omega$ voor elke $x \in \mathbb{R}$.

EINDE THEORIE

(Tijd tot 11.00. Oefeningen om 14.00, zelfde plaats.)

1ste Ba Fysica
24.VIII.16
Analyse II oefeningen

(i) *Schrijf* ***naam*** *en* ***richting*** *boven elk blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*
(iv) *Een tekening is niet verplicht.*
(v) *Bij parametervoorstellingen: schrijf op hoe u aan uw parametervoorstelling komt. U moet de kenmerkende eigenschappen van een parametervoorstelling niet nagaan.*
(vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1. Bereken $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, waarbij $\vec{F}(x, y, z) = (1, 1, z^{-2})$ en waarbij Γ de snijkromme is van $x^2 + y^2 = 1$ en $xyz = 4$, doorlopen van $(\sqrt{3}/2, 1/2, 16/\sqrt{3})$ naar $(1/2, \sqrt{3}/2, 16/\sqrt{3})$.

Vraag 2. Bereken het volume van het gebied V dat bepaald wordt door de ongelijkheden $x^2 + 2y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $x \geq y\sqrt{2/3}$ en $|z| \leq x^2 + 2y^2$.

Vraag 3. Zij Σ het deel van het oppervlak $z^4 = x^2 + y^2$ $(z \geq 0)$ binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 20$. Bereken $\iint_\Sigma 8z^2 + 1 d\sigma$.

Vraag 4. Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$x^2 y dx + dy = 0.$$

De oplossingen mogen impliciet gegeven worden.

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Tijd tot 18:00