Inleiding tot de theoretische fysica

Theorie-examen

Academiejaar 2015-2016 - 2^e zit

Opgave 1 (4 punten)

Toon aan, voor een systeem met meerdere deeltjes $i = 1, .., N$, dat de arbeid verricht door de krachten op de deeltjes om deze van een begintoestand $\boldsymbol{r}_i(t_1), \dot{\boldsymbol{r}}_i(t_1)$ op tijdstip t_1 naar een eindtoestand $\boldsymbol{r}_i(t_2), \dot{\boldsymbol{r}}_i(t_2)$ op tijdstip t_2 te brengen, gelijk is aan het verschil van de totale kinetische energie tussen deze twee tijdstippen.

Opgave 2 (4 punten)

(a) Leid de Euler-Lagrange vergelijkingen af voor het volgend variationeel probleem: voor welke functies $(y_1(x), .., y_n(x))$ die door twee gegeven configuraties $(y_1(x_1), .., y_n(x_1))$ en $(y_1(x_2), .., y_n(x_2))$ gaan is de integraal

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_1(x), .., y_n(x), \dot{y}_1(x), .., \dot{y}_n(x), x)$$

extremaal (met $\dot{y}_k(x)$ de afgeleide naar x van de functie $y_k(x)$). Hierbij is $f(y_1, .., y_n, \dot{y}_1, .., \dot{y}_n, x)$ een gladde functie van $2n + 1$ reële argumenten.

(b) Pas dit toe, door invoeren van de actie-integraal als de tijdsintegraal van de Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ tussen twee tijdstippen. Toon aan dat de eis dat de actie-integraal extremaal is, resulteert in de Lagrange bewegingsvergelijkingen.

Opgave 3 (4 punten)

Toon aan, via de Lagrange vergelijkingen, dat de beweging van twee deeltjes die interageren via conservatieve krachten, equivalent is met enerzijds de vrije beweging van het zwaartepunt, anderzijds de beweging van één deeltje met gereduceerde massa onder een potentiaal die enkel afhangt van de relatieve positie van de twee deeltjes.

Opgave 4 (4 punten)

Toon aan dat, in geval van een attractieve invers-kwadratische centrale krachtwet $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$, de Laplace-Runge-Lenz vector $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r}\mathbf{r}$ een behouden grootheid is, en geef een geometrische interpretatie.

Opgave 5 (4 punten)

Geef (in matrixnotatie) een expliciete constructie van de Hamiltoniaan als functie van de veralgemeende coördinaten en toegevoegde momenten, voor het generieke geval van een systeem met conservatieve krachten en een kinetische energie die een homogene kwadratische vorm is in de veralgemeende snelheden.

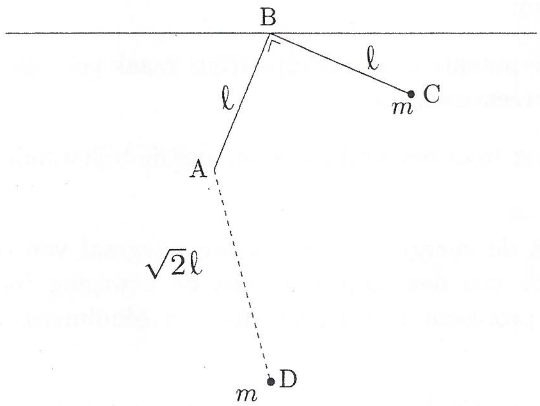
Inleiding tot de theoretische fysica

Oefeningenexamen 12 september 2016

Enkele afspraken:

- Begin elke opgave op een nieuw antwoordenblad. Schrijf op elk blad je naam en studentennummer. Ook al los je een opgave niet op, dien dan toch een blad in (met je naam en studentennummer). Schrijf duidelijk!
- Werk alles grondig uit. Stukken overschrijven uit het boek of de cursus levert echter geen punten op. Als je iets gebruikt uit het boek of de cursus, mag je de vergelijking gewoon overnemen. Vermeld echter het nummer van de vergelijking!
- Er zijn 2 opgaven. Elke opgave staat op evenveel punten. De tweede opgave staat op de ommezijde van dit blad!

Opgave 1



Werk in het verticale vlak (dus 2 dimensies). Een gelijkbenige haak ABC is opgehangen in het punt B, en kan vrij scharnieren in dit punt. De massaloze benen AB en BC hebben een lengte ℓ, en de hoek tussen de benen is 90°. In C is een puntmassa met massa m bevestigd. In A is een vrij scharnierende massaloze staaf AD met lengte $\sqrt{2}\ell$ bevestigd. Aan het uiteinde D is opnieuw een puntmassa met massa m bevestigd. Op de twee massa's werkt de zwaartekracht in.

(a) Hoeveel veralgemeende coördinaten zijn nodig? Waarom? Kies veralgemeende coördinaten.

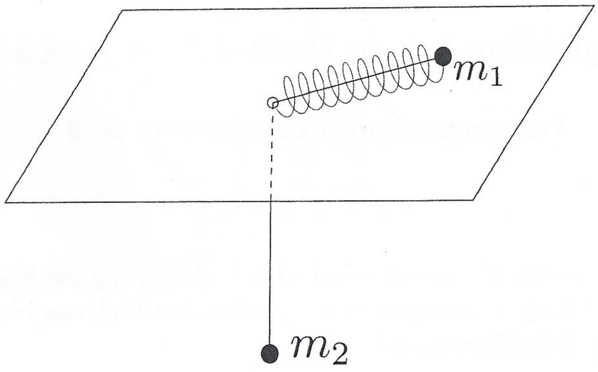
(b) Stel de kinetische en de potentiële energie op.

(c) Stel de Lagrangiaan en de bijhorende bewegingsvergelijkingen van Lagrange op.

(d) Bepaal de stabiele evenwichtspunten. Klopt dit met je intuïtie?

(e) Bepaal de frequenties en het karakter van de (kleine) normaaltrillingen.

Opgave 2



Neem twee massa's, m_1 en m_2 verbonden door een touw met lengte ℓ_t. Massa 1 is gebonden om wrijvingsloos te bewegen op een horizontaal vlak. In dat vlak zit een klein gaatje, waardoor het touwtje dat de massa's verbindt loopt. Tussen het gaatje en massa 1 is een veer gespannen met rustlengte ℓ_v en veerconstante k. Onder het vlak hangt massa 2 die onderhevig is aan de zwaartekracht en enkel verticaal kan bewegen. Het touw blijft strak gedurende de beweging. Zie bijhorende figuur.
De veerconstante en rustlengte zijn zo gekozen dat $m_2 g = k\ell_v$.

(a) Zoek geschikte veralgemeende coördinaten om dit systeem te beschrijven. Laat je inspireren door cilindercoördinaten.

(b) Stel de kinetische en de potentiële energie op. Hint: maak gebruik van het gegevene om de potentiële energie te vereenvoudigen.

(c) Druk de Lagrangiaan uit in deze coördinaten en stel de bijhorende Lagrangevergelijkingen op.

(d) Toon aan dat er naast de energie nog een eerste integraal van de beweging is. Wat is de fysische interpretatie van deze constante van de beweging (noem deze constante ℓ)? Gebruik deze om het probleem te herleiden tot een ééndimensionaal probleem met een effectieve potentiaal.

(e) Schets deze effectieve potentiaal. Is er een oplossing mogelijk waar de beweging van deeltje 1 cirkelvormig om het gaatje in het vlak is?

(f) Bepaal de straal r_0 van deze beweging. Is deze beweging stabiel?