Oefeningenexamen Algebra I — 14 januari 2015

Opgave 1. Beschouw een groep G met de volgende eigenschappen:

(A) $\mathbf{Z}(G) = 1$
(B) $G' \ncong G$
(C) $\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Aut}(G)$

Toon aan dat er *geen* groep X bestaat zodat $X' = G$. Ga (bijvoorbeeld) als volgt te werk (uit het ongerijmde). Definieer eerst $H := \mathbf{C}_X(G)$.

(i) Toon aan dat $H \cap G = 1$.
(ii) Toon aan dat $X = GH$.
(iii) Toon aan dat $X \cong G \times H$.
(iv) Toon aan dat H abels is.
(v) Kom tot een strijdigheid.

Uitwerking.

(i) Stel dat $X' = G$, beschouw dan $H := \mathbf{C}_X(G)$. Wegens (A) is $H \cap G = \mathbf{C}_X(G) \cap G = \mathbf{C}_G(G) = \mathbf{Z}(G) = 1$.

(ii) Kies nu $x \in X$ willekeurig. Vermits $G \to G : h \mapsto h^x$ een automorfisme van G is, bestaat wegens (C) een $g \in G$ zodanig dat $h^x = h^g$ voor alle $h \in G$. Bijgevolg is $t := xg^{-1} \in \mathbf{C}_X(G) = H$ en dus $x = tg \in HG$. Dus is $X = GH$.

(iii) Tot slot is H de kern van de actie $X \to \mathrm{Aut}(G)$ door toevoeging, zodat $H \trianglelefteq X$; daarnaast is uiteraard $G = X' \trianglelefteq X$. Uit bovenstaande puntjes volgt dat $X \cong G \times H$.
(iv) Bijgevolg is $H \cong X/G = X/X'$ abels, want $[uX', vX'] = [u,v]X' = X'$ voor alle $u, v \in X$.
(v) Maar dan is $G = X' = (G \times H)' = G' \times H' \cong G'$, strijdig met (B).

Opgave 2. Beschouw een groep G ($\neq 1$) met de volgende eigenschap:

> De doorsnijding van elke collectie niet-triviale deelgroepen vormt zelf een niet-triviale deelgroep.

(i) Toon aan dat elk element van G eindige orde heeft.
(ii) Toon aan dat een priemgetal p bestaat zodat de orde van elk element van G een macht van p is.
(iii) Toon aan dat G juist $p-1$ elementen van orde p telt.

Uitwerking.

(i) Als het element g oneindige orde had, zou $\bigcap_{i\geq 1}\langle g^i\rangle = 1$ een oneindige collectie niet-triviale deelgroepen zijn met triviale doorsnede. (Dit komt overeen met $\mathbb{Z}\cap 2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}\cap\cdots = 1$.)
(ii) Als er elementen van orde $n \in \mathbb{N}$ bestaan, dan bestaan ook elementen van orde d voor elke deler d van n. Als er dus niet zo'n priemgetal bestaat als uit de opgave, dan bestaan er twee priemen p en q met elementen g en h van die ordes. Maar dan is $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = 1$, strijdig met het gegeven voor de collectie niet-triviale deelgroepen $\{\langle g\rangle, \langle h\rangle\}$.
(iii) Een element g van orde p bepaalt een cyclische deelgroep $\langle g\rangle \cong \mathbf{C}_p$. Stel dat $h \notin \langle g\rangle$ ook orde p heeft, dan is $\langle h\rangle \cap \langle g\rangle = 1$, wat onmogelijk is. Bijgevolg moeten alle elementen van orde p in $\langle g\rangle$ bevat zijn, dus zijn er juist $p-1$.

Opgave 3. Beschouw een commutatieve ring met eenheid R. Onderstel dat $R \neq 0$ en dat R geen veld is. Toon aan dat volgende uitspraken equivalent zijn:

(A) R is een hoofdideaaldomein en heeft een uniek niet-nul priemideaal.
(B) R is een hoofdideaaldomein en heeft een uniek maximaal ideaal.
(C) R is een uniekefactorisatiedomein waarin elke twee irreduciebele elementen geassocieerd zijn.

Uitwerking.

(A→B) Elk maximaal ideaal is automatisch een niet-nul priemideaal (vermits $R \neq 0$). Dus als er meerdere maximale idealen zouden zijn, dan zijn er ook meerdere niet-nul priemidealen.

(B→C) Merk op dat elk hoofdideaaldomein automatisch een uniekefactorisatiedomein is. Noem het unieke maximale ideaal M. Vermits R een hoofdideaaldomein is, bestaat een $t \in R$ zodat $M = (t)$. We tonen aan dat elk irreduciebel element geassocieerd is aan t, daaruit volgt dan dat elke twee irreduciebele elementen aan elkaar geassocieerd zijn. Neem dus een willekeurig irreduciebel element s. Bij definitie is dit geen eenheid, dus $(s) \neq R$. Dan is (s) bevat in een maximaal ideaal, dat dan alleen het ideaal (t) kan zijn. Dus $s = ut$ voor zekere $u \in R$. Maar s was irreduciebel, dus moet $u \in R^\times$ of $t \in R^\times$. De tweede mogelijkheid is uitgesloten, want dan zou $M = (t) = R$ en bijgevolg zijn s en t geassocieerd.

(C→A) We tonen eerst aan dat er juist één priemideaal is: merk op dat er minstens 1 is, want er is zeker een maximaal ideaal en maximale idealen zijn ook priem. Beschouw nu een willekeurig priemideaal P. We zullen aantonen dat $P = R \setminus R^\times$ en daaruit volgt dat P het het enige priemideaal is. De ene inclusie is duidelijk vermits P geen eenheden bevat. Neem nu een willekeurig element $p \in P$ en ontbind dit in in irreduciebele factoren $p_1 \ldots p_n \in P$. Vermits P priem is, moet zeker een $p_i \in P$, dus P bevat een irreduciebel element, noem het t. Neem nu een willekeurige $r \in R \setminus R^\times$ en ontbind deze in irreduciebele elementen $r = r_1 \ldots r_n$. Nu zijn r_1 en t beide irreduciebel en dus geassocieerd, dus $r_1 = ut$ voor zekere $u \in R^\times$. Maar dan is $r = (ur_2 \ldots r_n)t \in RP \subseteq P$. Dit bewijst de inclusie $R \setminus R^\times \subseteq P$.

Vermits elk element van R te schrijven is als ut^n met $n \in \mathbb{N}$ en $u \in R^\times$ geldt voor een willekeurig ideaal $I \trianglelefteq R$ dat $I = (t^n)$ met $n \in \mathbb{N}$ de laagste waarde zodat $t^n \in I$ of $I = (0)$. Bijgevolg is R een PID.

Opmerking. Bovenstaande uitwerking kan nog wat ingekort worden door meer stellingen uit de cursus te gebruiken.

Opgave 4. Beschouw een veld K met karakteristiek $\neq 2$ en de ring $R = K[x]/(x^2 - 1)$.

(i) Toon aan dat volgende begrippen equivalent zijn: (1) R-modulen V (2) vectorruimte V over K met een endomorfisme $\phi : V \to V$ zodat $\phi \circ \phi = 1$.

(ii) Zij V een R-moduul. Toon aan dat $V = V^+ \oplus V^-$, waarbij $V^+ = \{v \in V \mid xv = v\}$ en $V^- = \{v \in V \mid xv = -v\}$.

(iii) Toon met behulp van (ii) aan dat het endomorfisme ϕ uit deel (i) ten opzichte van een geschikte basis gegeven is door $\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1, -1, -1, \ldots, -1)$.

(iv) * Geef een tegenvoorbeeld voor (iii) voor het geval kar $K = 2$.

Uitwerking

(i) De werking van K op V blijft hetzelfde; de werking van ϕ komt overeen met de werking van x en dat gaat goed omdat $\phi \circ \phi = 1$ en ook $x^2 = 1$ in R.

(ii) Schrijf $v_1 = \frac{v+xv}{2}$, $v_2 = \frac{v-xv}{2}$ en merk op $v_1 \in V^+$, $v_2 \in V^-$, en $v = v_1 + v_2$, zodat $V = V^+ + V^-$. Stel nu dat $v \in V^+ \cap V^-$, dan zou $v = xv$ en $v = -xv$, zodat $xv = -xv$, dus $xv = 0$ en dan ook $v = 0$. Bijgevolg is $V^+ \cap V^- = 0$ en dus $V = V^+ \oplus V^-$.

(iii) Kies een basis $\mathcal{B}^+$ voor V^+ en een basis $\mathcal{B}^-$ voor V^-. Vermits $\phi(b) = b$ voor alle $b \in V^+$. Dan is $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ een basis voor V en ten opzichte van deze basis heeft ϕ duidelijk de gewenste vorm.

(iv) De matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ over het veld $\mathbb{F}_2$ heeft de eigenschap dat $A^2 = 1$ en A kan niet ten opzichte van een geschikte basis als diagonaalmatrix worden geschreven want de eigenwaarde 1 heeft algebraische multipliciteit 2 maar de meetkundige multipliciteit (de dimensie van de eigenruimte) is 1.