Examen Logica eerste zit – Oplossingen

1. Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiëren we
$$\text{discont}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ is niet continu in } x\}.$$
Bepaal de kardinaliteit van de volgende verzamelingen
   (a) *(2 punten)* $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \text{discont}(f) \text{ is eindig}\}$,
   (b) *(1,5 punten)* $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \text{discont}(f) = \mathbb{R}\}$.

Oplossing: (a) Definieer
$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \text{discont}(f) \text{ is eindig}\}.$$
We zullen bewijzen dat $|X| = 2^\omega$. Het is duidelijk dat $2^\omega \leq |X|$. Door de stelling van Cantor-Schröder-Bernstein volstaat het dus te bewijzen dat $|X| \leq 2^\omega$. Merk op dat
$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}} \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \text{discont}(f) \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}\}.$$
Omdat de unie van 2^ω verzamelingen van kardinaliteit 2^ω zelf kardinaliteit 2^ω heeft, volstaat het te bewijzen dat de verzameling
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \text{discont}(f) \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}\}$$
kardinaliteit 2^ω heeft (met $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ gefixeerd). Beschouw de bijectie
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \text{discont}(f) \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}\} \to C((-\infty, a_1)) \times C((a_1, a_2)) \times \cdots C((a_n, \infty)) \times \mathbb{R}^n :$$
$$f \to (f_{|(-\infty, a_1)}, f_{|(a_1, a_2)}, \ldots f_{|(a_n \infty)}, f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$
Het resultaat volgt nu uit het feit dat de ruimte van continue functies $C(I)$, met I een open interval in $\mathbb{R}$, kardinaliteit 2^ω heeft. Dit kan bewezen worden op dezelfde manier als oefening 13 (of uit deze oefening afgeleid worden).

(b) Definieer
$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, \text{discont}(f) = \mathbb{R}\}.$$
We zullen bewijzen dat $|X| = 2^{(2^\omega)}$. We hebben $|X| \leq |\mathbb{R}^\mathbb{R}| = 2^{(2^\omega)}$. Door de stelling van Cantor-Schröder-Bernstein volstaat het dus te bewijzen dat $2^{(2^\omega)} \leq |X|$. Merk op dat de verzameling functies $\{1, 2\}^{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ kardinaliteit $2^{(2^\omega)}$ heeft. Beschouw nu de injectie $T : \{1, 2\}^{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \to X$ met
$$T(f)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ f(x), & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2. *(3 punten)* Zij X een oneindige verzameling en $f : X \to X$ een bijectie zodat $f^n(x) \neq x$ voor alle $x \in X$ en $n = 1, 2, 3, \ldots$ met

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ keer}}(x).$$

Toon aan dat er een lineaire ordening $\leq$ op X bestaat zodat

$$x < f(x) < f^2(x) < f^3(x) < \cdots < f^n(x) < f^{n+1}(x) < \cdots$$

voor alle $x \in X$.

Oplossing: Schrijf $f^0(x) = x$ en voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f^{-n}(x) = \underbrace{f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ keer}}(x).$$

Definieer de volgende equivalentierelatie op X:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ met } f^n(x) = y.$$

De equivalentieklassen onder $\sim$ zijn van de vorm

$$[x] = \{f^n(x) \,:\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Wegens oefening 26 bestaat er een lineaire ordening $\preceq$ op de verzameling van equivalentieklassen $X \backslash \sim$. Definieer nu als volgt een binaire relatie op $\leq$ op X: $x \leq y$ asa $x \not\sim y$ en $[x] \prec [y]$ of $x \sim y$ en $f^n(x) = y$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. De assumptie impliceert dat $\leq$ een lineaire ordening is die aan het gevraagde voldoet.

Opmerking: Men kan deze oefening ook oplossen door het Lemma van Zorn rechtstreeks toe te passen. Beschouw de verzameling $\mathcal{P}$ van koppels $(A, \leq_A)$ die voldoen aan volgende eigenschappen: $A \subseteq X$ met $f(A) = A$ en $\leq_A$ een lineaire ordening die voldoet aan

$$a < f(a) < f^2(a) < f^3(a) < \cdots < f^n(a) < f^{n+1}(a) < \cdots$$

voor alle $a \in A$. Definieer de volgende ordening op $\mathcal{P}$: $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ asa $A \subseteq B$ en $\leq_{B|A \times A} = \leq_A$. Met behulp van het lemma van Zorn kan men aantonen dat de poset $\mathcal{P}$ een maximaal element $(M, \leq_M)$ bevat. Ten slotte toont men aan dat $M = X$. De details worden aan de lezer overgelaten.

3. Zij $(X, \leq_X)$ en $(Y, \leq_Y)$ goed geordende verzamelingen. De lexicografische ordening $\leq$ op $X \times Y$ wordt als volgt gedefinieerd: $(x, y) \leq (x', y')$ als en slechts als $y <_Y y'$ of $y = y'$ en $x \leq_X x'$. De verzameling $X \cdot Y := (X \times Y, \leq)$ is goed geordend (cfr. oefening 34 uit de cursus). Ten slotte schrijven we $X \prec Y$ als $X \preceq Y$ en $X \ncong Y$ (als goede ordeningen).

   (a) *(1,5 punten)* Zij $X \neq \emptyset$ en Y goede ordeningen. Toon aan dat voor alle $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$, geldt dat $X \cdot Y_{y_1} \prec X \cdot Y_{y_2}$ met

   $$Y_y = \{x \in Y \,:\, x < y\}, \qquad y \in Y.$$

   Oplossing: Omdat $X \cdot Y_{y_1}$ een initieel segment van $X \cdot Y_{y_2}$ is, hebben we dat $X \cdot Y_{y_1} \preceq X \cdot Y_{y_2}$. We tonen nu aan dat $X \cdot Y_{y_1} \ncong X \cdot Y_{y_2}$. We werken uit het ongerijmde. Stel dat $f : X \cdot Y_{y_2} \to X \cdot Y_{y_1}$ een order-isomorfisme is. Omdat $X \cdot Y_{y_1}$ een initieel segment van $X \cdot Y_{y_2}$ is, hebben we dat $f_{|X \cdot Y_{y_1}}$ een inbedding van $X \cdot Y_{y_1}$ in zichzelf is. Uit Lemma 1.3.7 volgt nu dat $f_{|X \cdot Y_{y_1}}$ de identieke functie op $X \cdot Y_{y_1}$ moet zijn. Dit is strijdig met de injectiviteit van f (beschouw het beeld van het element $(0_X, y_1) \in X \cdot Y_{y_2}$).

(*b*) *(1,5 punten)* Zij $X \neq \emptyset$, Y_1 en Y_2 goede ordeningen. Toon aan dat $Y_1 \prec Y_2$ als en slechts als $X \cdot Y_1 \prec X \cdot Y_2$.

Oplossing: Neem eerst aan dat $Y_1 \prec Y_2$. Zij $\infty \notin Y_2$. Definieer $Y = Y_2 \cup \{\infty\}$ en breid de ordening $\leq_{Y_2}$ uit tot Y door te stellen dat ∞ groter is dan eender welk element van Y_2. Op die manier is Y een well-order met $Y_1 \prec Y_2 \prec Y$. Uit oefening 40 volgt dat er $y_1, y_2 \in Y$ met $y_1 < y_2$ zijn zodat $Y_j \cong Y_{y_j}$, $j = 1, 2$. Het resultaat volgt nu uit deel (a).

Opmerking: Men kan deze richting ook rechtstreeks bewijzen met de techniek uit deel (a).

Neem omgekeerd aan dat $X \cdot Y_1 \prec X \cdot Y_2$. We werken uit het ongerijmde, stel dus $Y_1 \not\prec Y_2$. Uit propositie 1.3.9 volgt dan dat $Y_2 \preceq Y_1$ en dus $X \cdot Y_2 \preceq X \cdot Y_1$. Hieruit zou volgen dat $X \cdot Y_1 \prec X \cdot Y_1$, een strijdigheid.

(*c*) *(1 punt)* Geef een voorbeeld van goed geordende verzamelingen X_1, X_2 en Y zodat $X_1 \prec X_2$ en $X_1 \cdot Y \cong X_2 \cdot Y$.

Oplossing: $X_1 = \{0\}$, $X_2 = \{0, 1\}$, $Y = \omega$.

4. *(3,5 punten)* Zij K een oneindig veld. Toon aan dat er een velduitbreiding K' van K bestaat zodat

   (*i*) K' een element a bevat dat transcendentaal over K is, i.e. $P(a) \neq 0$ voor elk niet-nul polynoom P met coëfficiënten in K,

   (*ii*) K' aan dezelfde L-zinnen voldoet als K met $L = (0, 1, +, \cdot)$ de taal van de ringen.

   (*iii*) $|K'| = |K|$.

   Oplossing: Definieer de taal $L' = L \cup \{c_x : x \in K\} \cup \{a\}$ met c_x, $x \in K$, en a constanten. Beschouw de L'-theorie T met volgende axiomas

$$\begin{aligned}
&\{\text{L-zinnen } \varphi \text{ met K} \models \varphi\} \cup \{\neg(c_x = c_y) : \forall x, y \in K \text{ met } x \neq y\} \\
&\cup \{c_0 = 0 \wedge c_1 = 1\} \cup \{c_{x+y} = c_x + c_y \wedge c_{x \cdot y} = c_x \cdot c_y : \forall x, y \in K\} \\
&\cup \{\neg(c_{x_n} a^n + \cdots c_{x_1} a + c_{x_0} = 0) : \forall n = 1, 2, 3, \ldots, \forall x_1, \ldots x_n \in K \text{ met } x_n \neq 0\}.
\end{aligned}$$

   Merk op dat elk model van T een velduitbreiding is van K die voldoet aan voorwaarden (i) en (ii). Uit de stelling van Löwenheim-Skolem volgt dat als T consistent is, er ook een model van T van zal bestaan met dezelfde kardinaliteit als K. We tonen nu de consistentie van T aan met behulp van de compactheidsstelling. Zij T' een eindige deeltheorie van T. Uit het feit dat K oneindig is en een polynoom slechts eindig veel oplossingen heeft, volgt er dat K een model is van T'.

5. Zij L een eerste orde taal en $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij van L-structuren met $M_n \preceq M_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. We definiëren als volgt een L-structuur op M:

   - $c^M := c^{M_0}, \qquad \forall c \in \text{con}(L)$,
   - Voor $f \in \text{fun}(L)$ van ariteit l

$$f^M(m_1, \ldots, m_l) := f^{M_n}(m_1, \ldots, m_l), \qquad \forall m_1, \ldots, m_l \in M,$$

     als $m_1, \ldots, m_l \in M_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

- Voor $R \in \mathrm{rel}(L)$ van ariteit l

$$(m_1, \ldots, m_l) \in R^M \Leftrightarrow (m_1, \ldots, m_l) \in R^{M_n}, \qquad \forall m_1, \ldots, m_l \in M,$$

als $m_1, \ldots, m_l \in M_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

(a) *(1,5 punten)* Toon aan dat $f^{\mathcal{M}}$ en $R^{\mathcal{M}}$ goed gedefinieerd zijn en dat voor alle L-termen t met variabelen $x_1, \ldots, x_l$ geldt dat

$$t^M(m_1, \ldots, m_l) = t^{M_n}(m_1, \ldots, m_l)$$

als $m_1, \ldots, m_l \in M_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

Oplossing: We moeten bewijzen dat

$$f^{M_n}(m_1, \ldots, m_l) = f^{M_k}(m_1, \ldots, m_l)$$

voor $m_1, \ldots, m_l \in M_n$ en $n \leq k$. Zij $f^{M_n}(m_1, \ldots, m_l) = m \in M_n$. Beschouw de L_{M_n}-zin

$$\varphi := (f(c_{m_1}, \ldots, c_{m_l}) = c_m).$$

Uit het feit dat $M_n \preceq M_k$ volgt dat $M_k \models \varphi$ en dus

$$f^{M_k}(m_1, \ldots, m_l) = f^{M_k}(c_{m_1}^{M_k}, \ldots, c_{m_l}^{M_k}) = c_m^{M_k} = m.$$

Het bewijs voor de relaties gaat analoog.

Het deel over de termen bewijzen we door middel van inductie op de lengte van termen. Inductiebasis: duidelijk. Inductiestap: stel dat

$$t(x_1, \ldots, x_l) = f(t_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_l))$$

en dat het gevraagde geldt voor alle termen met lengte kleiner dan de lengte van t. Zij $m_1, \ldots, m_l \in M_n$. Uit de inductiehypothese halen we dat

$$t_j^M(m_1, \ldots, m_l) = t_j^{M_n}(m_1, \ldots, m_l) \in M_n$$

voor $j = 1, \ldots, k$. De definitie van de f^M geeft nu dat

$$\begin{aligned}
t^M(m_1, \ldots, m_l) &= f^M(t_1^M(m_1, \ldots, m_l), \ldots, t_k^M(m_1, \ldots, m_l)) \\
&= f^M(t_1^{M_n}(m_1, \ldots, m_l), \ldots, t_k^{M_n}(m_1, \ldots, m_l)) \\
&= f^{M_n}(t_1^{M_n}(m_1, \ldots, m_l), \ldots, t_k^{M_n}(m_1, \ldots, m_l)) \\
&= t^{M_n}(m_1, \ldots, m_l).
\end{aligned}$$

(b) *(1,5 punten)* Toon aan dat $M_n \preceq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Oplossing: We moeten bewijzen dat voor alle L_{M_n}-zinnen φ geldt dat $M_n \models \varphi$ asa $M \models \varphi$. We doen dit door middel van inductie op de lengte van de formule φ. Inductiebasis: voor atomaire formules volgt dit uit deel (a). Inductiestap: stel dat het gevraagde geldt voor alle formules met lengte kleiner dan de lengte van φ. Als φ van de vorm $\neg\varphi_1$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, of $\varphi_1 \to \varphi_2$ is, volgt dit uit de inductiehypothese. Stel dat φ van de vorm $\exists x \varphi_1$ is. De inductiehypothese geeft dat $M_n \models \varphi$ impliceert dat $M \models \varphi$. Neem nu aan dat $M \models \varphi$. Dit wil zeggen dat $M \models \varphi_1(m)$ voor zekere $m \in M$. Kies $k \geq n$ zodat $m \in M_k$. De inductiehypothese (toegepast op M_k) geeft dat $M_k \models \varphi_1(m)$ en dus $M_k \models \varphi$. De veronderstelling $M_n \preceq M_k$ geeft nu dat $M_n \models \varphi$. Het geval dat φ van de vorm $\forall x \varphi_1$ is, gaat analoog.

6. (*a*) *(1 punt)* Geef een gedecoreerde bewijsboom voor

$$\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$$

zonder de regel falsum-eliminatie ($\perp E$) te gebruiken.

(*b*) *(2 punten)* Stel dat de variabele x niet optreedt in ψ. Geef gedecoreerde bewijsbomen voor

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\varphi(x) \to \psi) \qquad \text{en} \qquad (\exists x\varphi(x) \to \psi) \to \forall x(\varphi(x) \to \psi).$$

Oplossing: zie de scans op Minerva.