



Examen numerieke methoden

MASTER WISKUNDE

Theorie – 29 mei 2017

Naam :

Richting :

1. (2 pt) Definieer, formuleer of omschrijf de volgende begrippen :

(i) De lineaire differentie-operator $\mathcal{L}[z(x); h]$ geassocieerd aan $\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}$

(ii) De eerste Dahlquist-barrière

(iii) A-stabiliteit

(iv) toegevoegde van een numerieke methode voor $y' = f(x, y)$.

2. (2 pt) Formuleer en bewijs de CFL-voorwaarde.

3. (2 pt) Wat is het idee achter Fourier-analyse bij het numeriek oplossen van PDVen?

4. (3 pt) Welke verschillende mechanismen hebben we in de cursus ontmoet om een fout-schatting uit te voeren, en aldus een variabele-staplenkte-bepaling mogelijk te maken?

5. (3 pt) Karakteriseer stijve problemen op 3 verschillende manieren.

6. (3 pt) Als voor een s -traps Runge-Kutta methode de rijvereenvoudigende voorwaarde $C(\eta)$, met

$$C(\eta) : \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q} \quad \begin{cases} q = 1, \dots, \eta \\ i = 1, \dots, s \end{cases}$$

geldt, maar niet $C(\eta+1)$, dan wordt η de traporde (*stage order*) van de methode genoemd.

- (i) Wat is de maximale traporde voor een expliciete methode?

- (ii) Wat is de maximale traporde voor een impliciete methode? Hoe noemen we dergelijke methoden? Geef de algemeenste 1-traps methode van deze soort.

- (iii) Bouw je een methode met een hoge traporde, dan heeft dit als voordeel dat je heel wat ordevoorwaarden kunt laten vallen. Er zijn echter nog andere voordelen aan verbonden. Vertel nog iets extra's over het nut van een hoge traporde.

7. (2 pt) Zij t een boom en zij F de functie die bomen associeert met elementaire differentiaal-
alen voor het probleem.

- (i) Wat is het verband tussen $F(t)$ en $F([t])$?

- (ii) Hoe luidt dit verband voor het stelsel $y' = Ay$?

8. (2 pt) We koppelen de 2-staps Nyström predictor

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2 h f_n$$

aan de 2-staps Milne-Simpson corrector

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3} (f_{n+1} + 4 f_n + f_{n-1})$$

in een $P(EC)^4 E^{1-t}$ -mode en we passen dit toe op $y' = y$ met $y(0) = 1$. Daartoe nemen we als startwaarden $y_0 = 1$ en $y_1 = \exp(h)$.

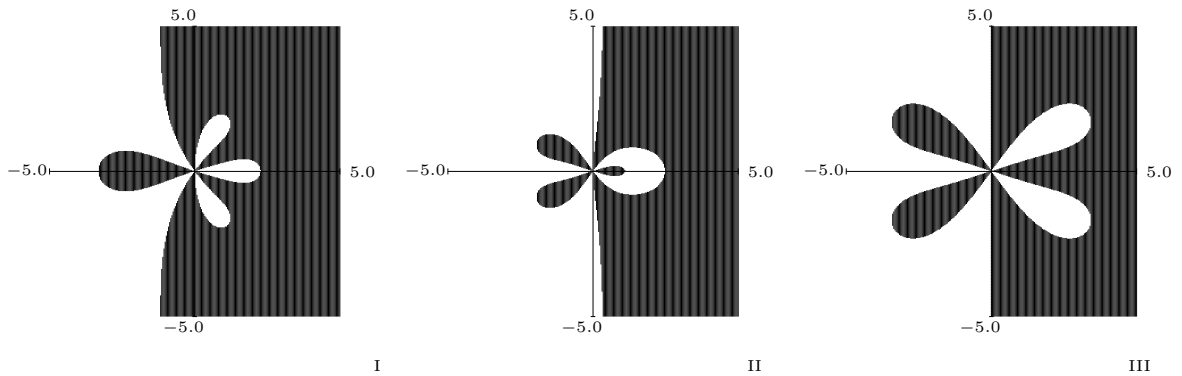
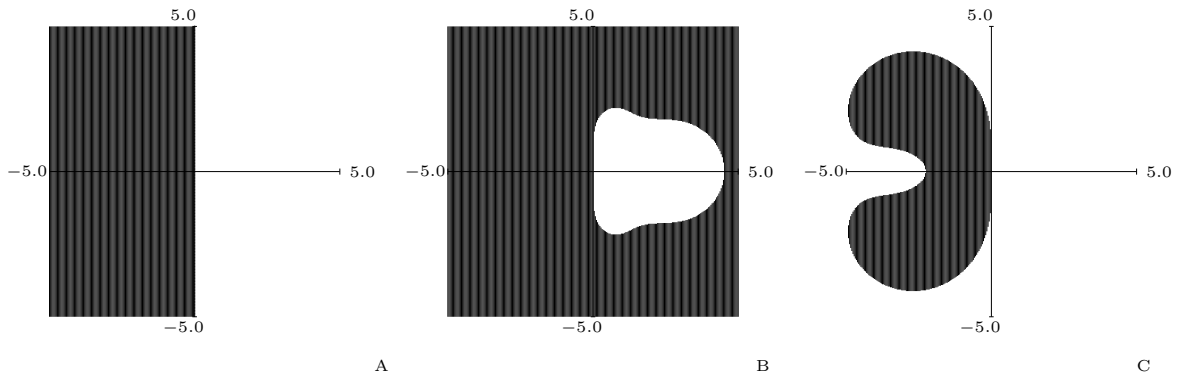
In de onderstaande tabel wordt, na iedere stap van het schema, de leidende term uit de fout op y_2 gevraagd. Vul dit, zonder ook maar de minste berekening uit te voeren, zoveel mogelijk in. Maar hierbij gebruik van de onderstaande informatie :

$$y_{n+q} - y_{n+q-l} = h \sum_{i=0}^{q-u} \gamma_i \nabla^i f_{n+q-u}$$

	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	...
Adams-Bashforth	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$	$\frac{19087}{60480}$	
Adams-Moulton	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{19}{720}$	$-\frac{3}{160}$	$-\frac{863}{60480}$	
Nyström	2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{29}{90}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{1139}{3780}$	
Milne-Simpson	2	-2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{90}$	$-\frac{1}{90}$	$\frac{37}{3780}$	

na P ... h^{\dots}
na P(EC) ... h^{\dots}
na P(EC)² ... h^{\dots}
na P(EC)³ ... h^{\dots}
na P(EC)⁴ ... h^{\dots}

9. (2 pt) Hieronder vind je de ordesterren en de stabiliteitsgebieden van drie methoden. Welk gebied en welke ster horen bij welke methode en wat kun je zeggen over de stabiliteit van deze methoden? De gebieden waarbij $|R(\hat{h})| < |\exp(\hat{h})|$ (ordester) of $|R(\hat{h})| < 1$ (stabiliteitsgebied) zijn gearceerd.



- (i) ordester I en gebied ...;stabiel
(ii) ordester II en gebied ...;stabiel
(iii) ordester III en gebied ...;stabiel

1. Gegeven de differentievergelijking

$$y_{n+4} + \alpha_2 y_{n+2} + \alpha_0 y_n = h(\beta_3 f_{n+3} + \beta_1 f_{n+1}).$$

- (i) Bespreek de orde van de differentie-operator die geassocieerd is aan deze vergelijking.
 - (ii) Toon aan dat, als de orde gemaximaliseerd wordt, geen convergente methode wordt gevonden.
 - (iii) Stel dat α_0 behouden wordt als parameter en dat α_2 , β_1 en β_3 zo gekozen worden dat de orde van de methode zo hoog mogelijk wordt. Voor welke waarde(n) van α_0 worden convergente methoden gevonden?
 - (iv) Toon aan dat, voor elk van de toelaatbare waarden voor α_0 , hetzelfde het gebied van absolute stabiliteit wordt bekomen. Teken dit gebied.
2. Gegeven het schema PEC_1EC_2E waarbij P, E, C_1 en C_2 respectievelijk staan voor de Euler-methode, de functie-evaluatie, de achterwaartse Euler-methode en de trapeziumregel.
- (i) Schrijf de formules neer voor PEC_1EC_2E .
 - (ii) Schrijf PEC_1EC_2E neer als Runge-Kutta methode en bepaal de orde van het schema.
 - (iii) Bepaal de oplossing y_n als de methode toegepast wordt op $y' = -y$, $y(0) = 1$ met $h = 1$.
3. Stel dat je RK methoden zou opstellen die speciaal bedoeld zijn voor het integreren van 1-dimensionale problemen van de vorm

$$y' = \alpha_n y^n + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \dots + \alpha_1 y + \alpha_0$$

waarbij α_i , $i = 0, 1, \dots, n$ constanten zijn.

- (i) Stel dat $n = 2$. Geef voor $p = 1, 2, \dots, 5$ een overzicht van het aantal ordevoorwaarden dat moet vervuld worden.
- (ii) Stel dat $n = 3$. Geef voor $p = 1, 2, \dots, 5$ een overzicht van het aantal ordevoorwaarden dat moet vervuld worden.

Schrijf deze voorwaarden ook telkens op.

4. Voor de numerieke integratie van $u_t + a u_x = 0$ beschouwen we het *Lax-Wendroff scheme*. Dit schema neemt de vorm

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\nu(1+\nu)U_{j-1}^n + (1-\nu^2)U_j^n - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j+1}^n$$

aan.

- (i) Toon aan dat dit schema ontstaat uit kwadratische interpolatie door de punten (x_{j-1}, U_{j-1}^n) , (x_j, U_j^n) en (x_{j+1}, U_{j+1}^n) en de wetenschap dat U_j^{n+1} op de karakteristiek met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{a}$ ligt.
- (ii) Hoe luidt de CFL-voorwaarde voor dit schema ?
- (iii) Toon aan dat een Fourier-analyse leidt tot diezelfde CFL-voorwaarde.
- (iv) Geldt er bij toepassing van dit schema een maximum-principe ?

Nog enkele tips :

- probeer uw antwoorden bondig en correct te formuleren.
- heb je bij Maple en/of Matlab moeite met (de syntax van) bepaalde commando's, aarzel dan niet dit te vragen.

Oplossing :

1. Via het bestand `orde.mws` kunnen we met de instructies

```
k:=4;
alpha:=array(0..k,[a0,0,a2,0,1]):
beta:=array(0..k,[0,b1,0,b3,0]):
```

de gegeven methode implementeren.

- (i) Door de onderstaande instructies één voor één toe te voegen verhoogt de orde tot maximaal 3:

```
> a2:=-1-a0;
> b3:=2-b1-2*a0;
> b1:=-2*a0;
> a0:=1;
```

- (ii) De resulterende methode (waarbij alleen nog $a_0 = 1$ dient ingevuld te worden)

$$y_{n+4} - (1 + a_0)y_{n+2} + a_0 y_n = 2h(a_0 f_{n+1} - f_{n+3})$$

is echter niet nul-stabiel voor $a_0 = 1$.

- (iii) De stabiliteitsveelterm is

$$\pi[r, \hat{h}] = r^4 + 2\hat{h}r^3 - (1 + a_0)r^2 - 2a_0\hat{h}r + a_0,$$

en kan herschreven worden als

$$\pi[r, \hat{h}] = (r^2 - a_0)(r^2 - 2r\hat{h} - 1).$$

waaruit blijkt dat er (voor $\hat{h}=0$) alleen nul-stabiliteit (en dus ook convergentie) zal zijn als $|a_0| < 1$.

- (iv) Zoeken we de rand van het stabiliteitsgebied (door $r = e^{i\theta}$ te stellen), dan vinden we $\hat{h} = i \sin \theta$. Dit is een interval op de imaginaire as tussen $-i$ en i . Het stabiliteitsgebied is leeg.

2. (i) De formules luiden

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{[0]} &= y_n^{[2]} + h f(x_n, y_n^{[2]}) \\ y_{n+1}^{[1]} &= y_n^{[2]} + h f(x_{n+1}, y_n^{[0]}) \\ y_{n+1}^{[2]} &= y_n^{[2]} + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n^{[2]}) + f(x_{n+1}, y_n^{[1]})) \end{aligned}$$

- (ii) Als Runge-Kutta methode vinden we de 3 traps methode (de 3 E-letters duiden op 3 functie-evaluaties)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

De orde van deze methode is 2.

- (iii) Gelet op het feit dat de stabiliteitsfunctie van deze methode $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2}$ is, vinden we dat $R(-1) = 0$, zodat $y_{n+1}^{[2]} = 0$.

3. Gebruik het programma `elem.diff.mws` en definieer bijvoorbeeld

```
>g:=(y)->[1,a2*y[2]^2+a1*y[2]+a0];q:=2;
>bomen:=generate_all_trees_of_order(p);
>map(u->F(u)[2],bomen);
```

waarbij je $p = 1, p = 2, \dots, p = 5$ stelt. Tel het aantal verschillende (en van nul verschillende) uitkomsten. Dan bekom je

p	1	2	3	4	5
	1	1	2	3	3

Op dezelfde wijze vind je dan voor

```
>g:=(y)->[1,a3*y[2]^3+a2*y[2]^2+a1*y[2]+a0];q:=2;
>bomen:=generate_all_trees_of_order(p);
>map(u->F(u)[2],bomen);
```

de tabel

p	1	2	3	4	5
	1	1	2	3	4

4. (i) De kwadratische interpolant $P_2(x)$ door de drie gegeven punten luidt

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j-1}-x_j)(x_{j-1}-x_{j+1})} U_{j-1}^n + \frac{(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})} U_j^n \\
 &\quad + \frac{(x-x_{j-1})(x-x_j)}{(x_{j+1}-x_{j-1})(x_{j+1}-x_j)} U_{j+1}^n \\
 &= \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{2(\Delta x)^2} U_{j-1}^n - \frac{(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(\Delta x)^2} U_j^n \\
 &\quad + \frac{(x-x_{j-1})(x-x_j)}{2(\Delta x)^2} U_{j+1}^n
 \end{aligned}$$

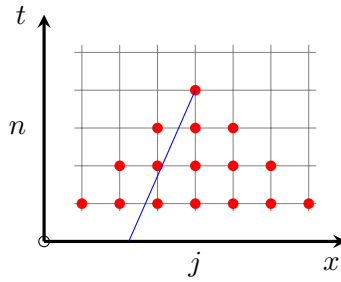
De karakteristiek door (x_j, t_{n+1}) heeft als vergelijking

$$t - t_{n+1} = \frac{1}{a}(x - x_j)$$

en het snijpunt van de karakteristiek met de lijn $t = t_n$ levert $x = x_j - a \Delta t = x_j - \nu \Delta x$. Derhalve is

$$U_j^{n+1} = P_2(x_j - \nu \Delta x) = \frac{1}{2}\nu(1+\nu)U_{j-1}^n + (1-\nu^2)U_j^n - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j+1}^n$$

(ii) Het *domain of dependence* van de differentievergelijking (rood) en differentiaalvergelijking (blauw) zijn aangeduid in de figuur. De CFL voorwaarde drukt uit dat het domain of dependence van de differentiaalvergelijking moet gelegen zijn binnen het domain van de differentievergelijking. De blauwe lijn, met richtingscoëfficiënt $1/a$ ligt tussen de rode punten indien $|1/a| > \Delta t / \Delta x$ of m.a.w. als $|\nu| \leq 1$.



(iii) We stellen $U_j^n = (\lambda)^n e^{i k j \Delta x}$ en vinden

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{1}{2} \nu (1 + \nu) e^{-i k \Delta x} + 1 - \nu^2 - \frac{1}{2} \nu (1 - \nu) e^{i k \Delta x} \\
 &= 1 - \nu^2 - i \nu \sin(k \Delta x) + \nu^2 \cos(k \Delta x) \\
 &= 1 - 2 \nu^2 \sin^2(k \Delta x / 2) - i \nu \sin(k \Delta x).
 \end{aligned}$$

Derhalve is

$$\begin{aligned}
 |\lambda|^2 &= (1 - 2 \nu^2 \sin^2(k \Delta x / 2))^2 + \nu^2 \sin^2(k \Delta x) \\
 &= 1 - 4 \nu^2 \sin^2(k \Delta x / 2) + 4 \nu^4 \sin^4(k \Delta x / 2) + 4 \nu^2 \sin^2(k \Delta x / 2) \cos^2(k \Delta x / 2) \\
 &= 1 - 4 \nu^2 \sin^4(k \Delta x / 2) + 4 \nu^4 \sin^4(k \Delta x / 2) \\
 &= 1 - 4 \nu^2 (1 - \nu^2) \sin^4(k \Delta x / 2),
 \end{aligned}$$

waaruit $|\lambda| \leq 1 \iff |\nu| \leq 1$.

(iv) Het maximum-principe drukt uit dat de numerieke oplossing haar extremale waarden bereikt langs de randen. Dit principe geldt hier niet, want niet alle coëfficiënten zijn positief.