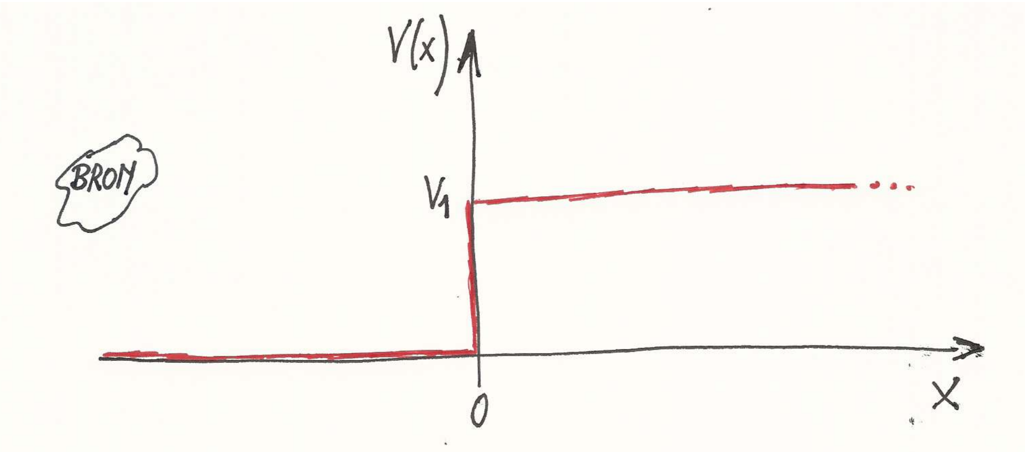
Examen “Kwantummechanica 1”: 16 januari 2017

THEORIE (30 punten)

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)



Deeltjes met massa $m \neq 0$ bewegen in één dimensie onder de invloed van een potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x < 0 \\ V_1(> 0) & , 0 \leq x < +\infty \end{cases} .$$

De deeltjes worden gecreëerd met een welbepaalde vaste energie $E \geq 0$ in een bron die zich aan de linkerkant van de oorsprong bevindt. Om de volgende vragen te beantwoorden maak je gebruik van de technieken die tijdens de theorielessen ontwikkeld werden.

- Beschouw de situatie $E < V_1$:
  - (a) Geef de definitie van de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (b) Bereken de reflectie- en transmissiecoëfficiënt.
  - (c) Bereken de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x,t)$ **voor het gebied** $-\infty < x < +\infty$.
- Beschouw de situatie $E > V_1$:
  - (a) Toon aan dat de reflectiecoëfficiënt R gegeven wordt door een uitdrukking van het type
  $$R = \frac{(1-\mathcal{C})^2}{(1+\mathcal{C})^2} ,$$
  en bepaal de grootheid $\mathcal{C}$.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen “Kwantummechanica 1”: 16 januari 2017

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL GEBRUIKT WORDEN
  1. de cursusnota’s (TRANSPARANTEN)
  2. het handboek “Quantum Mechanics” van Bransden en Joachain
  3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison

OEFENING 1 (15 PUNTEN)

Deeltje in een oneindig diepe potentiaalput en het correspondentiebeginsel van Bohr

Een massief deeltje met massa $M \neq 0$ beweegt in een oneindig diepe potentiaal tussen $x = 0$ en $x = 2L$. Dit betekent dat de potentiaal $V(x) = 0$ voor $x \in [0, 2L]$ en $V(x) = +\infty$ voor alle andere waarden van x.

Noem E_n de energie-eigenwaarden van de beschouwde hamiltoniaan met corresponderende genormeerde eigenfuncties $\psi_n(x)$. Op $t = 0$ wordt het deeltje in een toestand gebracht die een lineaire combinatie is van eigenfuncties van twee opeenvolgende kwantumgetallen

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_n(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n+1}(x) \ .$$

- Als men op een welbepaald tijdstip t de energie meet van het deeltje, welke waarden kan men dan vinden? Wat zijn de bijbehorende waarschijnlijkheden?
- Bereken de positiewaarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t)$ van het deeltje.
- Wat is de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje $< x >$ op een welbepaald tijdstip t?
- Bereken expliciet de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x, t)$ van het deeltje en toon expliciet aan dat voldaan is aan het principe van behoud van waarschijnlijkheid in het interval $[0, L]$ (dit is de linkerhelft van de put).
- Bereken de klassieke positiewaarschijnlijkheidsdichtheid $P_{klasiek}(x, t)$ en waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j_{klassiek}(x, t)$ van het deeltje bij een welbepaalde waarde van de energie E_c.
- Toon aan dat in de limiet van grote kwantumgetallen n het kwantummechanisch resultaat voor $< x >$ het klassiek resulaat benadert (illustratie van het correspondentiebeginsel van Bohr).
- Toon aan dat voor kleine kwantumgetallen n er een vrij groot verschil kan zijn tussen de kwantummechanische en klassieke voorspelling van $< x >$.

OEFENING 2 (5 PUNTEN)

Bewijs de volgende identiteit

$$e^{cA}Be^{-cA} = B + c[A,B] + \frac{c^2}{2!}[A,[A,B]] + \dots \ ,$$

waarbij c een reëel getal is en A, B operatoren zijn die horen bij niet nader bepaalde dynamische variabelen. Vervolledig de bovenstaande uitdrukking en **BEREKEN EXPLICIET** ook de coëfficiënt die hoort bij de term in c^3.