Examen kwantum mechanica

juni 2017

1 Oefeningen

1. **Spins in een magnetisch veld**
   Beschouw een systeem van 2 spin 1/2 deeltjes. Het eerste deelje ondervindt een magnetisch veld in de z-richting terwijl het 2e deeltje wordt geplaatst in een magnetisch veld in de x-richting. De Hamiltoniaan voor het systeem ziet er uit als volgt

   $$H = B_1 S_1^z \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes B_2 S_2^x \,. \tag{1}$$

   Op tijdstip $t = 0$ bevindt het systeem zich in toestand

   $$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\rangle \, |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \, |\downarrow\rangle \right) \,, \tag{2}$$

   met $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ de eigenvectoren van σ^z bij eigenwaarden 1 respectievelijk -1.

   (a) Bereken de tijdsevolutie om de toestand te vinden op tijd $t = t_1$.

   (b) Op tijdstip $t = t_1$ wordt de **totale** spin van het systeem in de z-richting (S^z_{tot}) gemeten. Wat is de kans dat men bij deze meting waarde +1 bekomt?

   (c) Wat is de kans dat men bij deze meting waarde 0 bekomt?

Extra oefening examen niveau.

→ Vrij. 20/10

* Methode 1: "matrix manier" $\boxed{\hbar = 1}$

tijdsevolutie:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$$

$$= \left[\sum_n e^{-i\lambda_n t} |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|\right] |\psi(0)\rangle$$

met $H|\lambda_n\rangle = \lambda_n |\lambda_n\rangle$

⇒ Tijdsevolutie wordt eigenwaarde probleem.

$\boxed{\text{In de z-basis}}$:

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle := |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle := |\uparrow\downarrow\rangle$$

⋮

4 basisvectoren: $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$

$S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: "Zegt of spin up ($\frac{1}{2}$) of down ($-\frac{1}{2}$) is."

$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: "flipt spin in de z-basis"

→ eigenlijk $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, maar $\hbar := 1$

$$H = \frac{B_1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{B_2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(voor S_z en S_x zie oef. 2.)

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_2 & -B_1 \end{pmatrix}$$

→ Zoek eigenwaarden.

$$\det\begin{pmatrix} B_1-\lambda & B_2 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_1-\lambda & B_2 \\ 0 & 0 & B_2 & -B_1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$= \det\begin{pmatrix} B_1-\lambda & B_2 \\ B_2 & B_1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} -(B_1+\lambda) & B_2 \\ B_2 & -(B_1+\lambda) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(B_1-\lambda)^2 - B_2^2\right]\left[(B_1+\lambda)^2 - B_2^2\right] = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$B_1 - \lambda = \pm B_2$ $\qquad$ $B_1 + \lambda = \pm B_2$

$\lambda_\pm = B_1 \mp B_2$ $\qquad$ $\lambda = \pm B_2 - B_1$

$\lambda_1 = B_1 + B_2 \qquad \lambda_2 = B_1 - B_2 \qquad \lambda_3 = B_2 - B_1$

$\lambda_4 = -B_2 - B_1$

→ Zoek eigenvectoren:

Vb: $\lambda_1 \to$ $\quad H|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle$

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\cancel{B_1 a} + B_2 b &= (\cancel{B_1} + B_2)\, a && (1)\\
B_2 a + \cancel{B_1 b} &= (\cancel{B_1} + B_2)\, b && (2)\\
-B_1 c + B_2 d &= (B_1 + B_2)\, c && (3)\\
B_2 c - B_1 d &= (B_1 + B_2)\, d && (4)
\end{aligned}$$

uit (3) $\quad d = c\,\dfrac{(2B_1 + B_2)}{B_2}$

invullen in (4) $\Rightarrow \quad c = 0$

als $c=0$ volgt uit (3) $\Rightarrow d = 0$

uit (1) en (2) $\Rightarrow a = b$

$$|\lambda_1\rangle = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ met a een constante

→ kies a zodat $|\lambda_1\rangle$ genormaliseerd is

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right)$$

<u>vb</u>: $\lambda_4 = -(B_1 + B_2) = -\lambda_1$

$$B_1 a + B_2 b = -(B_1 + B_2) a$$

$$B_2 a + B_1 b = -(B_1 + B_2) b$$

$$\cancel{-B_1 c} + B_2 d = \cancel{-(B_1 +} B_2) c$$

$$B_2 c - \cancel{B_1 d} = \cancel{-(B_1} + B_2) d$$

uit (1) en (2) $\Rightarrow$ $a = b = 0$

uit (3) en (4) $\Rightarrow$ $c = -d$

$$|\lambda_4\rangle = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$

Analoog voor λ_2 en λ_3

$$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \right)$$

$$|\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$

$|\lambda_n\rangle$ vormt orthonormale basis !

⊛ Methode 2 : "Sneller, meer inzicht"

→ druk algemene eigenvector $|\lambda_n\rangle$ uit als lin. comb. van basisvect

$$|\lambda_n\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle$$

→ Schrijf $H|\lambda_n\rangle$:

$$H|\lambda_n\rangle \; \frac{1}{2}\Big(aB_1|\uparrow\uparrow\rangle + bB_1|\uparrow\downarrow\rangle - cB_1|\downarrow\uparrow\rangle - dB_1|\downarrow\downarrow\rangle$$
$$+ aB_2|\uparrow\downarrow\rangle + bB_2|\uparrow\uparrow\rangle + cB_2|\downarrow\downarrow\rangle + dB_2|\downarrow\uparrow\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(aB_1+bB_2)|\uparrow\uparrow\rangle + (bB_1+aB_2)|\uparrow\downarrow\rangle$$
$$+ (dB_2 - cB_1)|\downarrow\uparrow\rangle + (cB_2 - dB_1)|\downarrow\downarrow\rangle\Big]$$

Constante kan je vergeten (opslorpen in λ)

dit moet gelijk zijn aan

$$\lambda_n\big(a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle\big)$$

→ Zoek oplossingen

→ Probeer 3 van de coeff. op 0 te zetten

→ kan niet

→ Probeer 2 v.d. coeff. op 0 te zetten.

Kan bv: $c = d = 0$ <u>OF</u> $a = b = 0$

$\rightarrow c = d = 0$

$$(a B_1 + b B_2) |\uparrow\uparrow\rangle + (b B_1 + B_2) |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$= \lambda_n (a |\uparrow\uparrow\rangle + b |\uparrow\downarrow\rangle$$

oplossingen: $a = b \rightarrow \lambda_n = B_1 + B_2$

$a = -b \rightarrow \lambda = B_1 - B_2$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$$

$\rightarrow a = b = 0$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$\rightarrow$ bv: $a = c = 0$ $d \neq 0$, $b \neq 0$

is geen mogelijkheid, omdat een lin. comb. van $|\uparrow\downarrow\rangle$ en $|\downarrow\uparrow\rangle$ nooit een eigenvect. kan zijn van $H \rightarrow H = H_1 + H_2$, want H_1 verandert de toestand niet en H_2 flipt de 2de spin, dan krijg je lin. comb. van $|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ en dit kan nooit gelijk zijn aan lin comb van $|\uparrow\downarrow\rangle$ en $|\downarrow\uparrow\rangle$

a) Tijdsevolutie:

$\boxed{\hbar := 1\ !}$

op $$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$|\varphi(t)\rangle = \left[\sum_n e^{-iE_n t} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right] |\varphi(0)\rangle$$

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle - |\psi_4\rangle\right]$$

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-i(B_1+B_2)t} |\psi_1\rangle - \frac{1}{2} e^{-i(B_1-B_2)t} |\psi_2\rangle + \frac{1}{2} e^{-i(B_2-B_1)t} |\psi_3\rangle - \frac{1}{2} e^{+i(B_1+B_2)t} |\psi_4\rangle$$

$$\vec{S}^2_{tot} = S_1^2 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes S_2^2$$

kans op $S = +1$: $|\langle\uparrow\uparrow|\varphi(t)\rangle|^2$

$S = -1$: $|\langle\downarrow\downarrow|\varphi(t)\rangle|^2$

kans op $S = 0$: $1 - P(+1) - P(-1)$

$$P(+1) = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i(B_1+B_2)t} - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i(B_1-B_2)t} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2(B_2 t)$$

$$P(-1) = \frac{1}{2} \sin^2(B_2 t) = P(+1)$$

$$P(0) = \cos^2(B_2 t)$$

→ Merk op dat we overal een factor $\frac{\hbar}{2}$ genegeerd hebben:

$$S^2 |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$$
$$S^2 |\downarrow\rangle = -|\uparrow\rangle$$

→ Dit komt neer op een herschaling van B_1 en B_2.