Statistische Fysica 1: 23 januari 2017

THEORIE (30 punten)

[T1] (10 PUNTEN)

T1.1 Onder welke omstandigheden kan een systeem zich bevinden in een situatie van "negatieve temperaturen" (op de schaal van Kelvin)? Geef een voorbeeld van een systeem dat negatieve temperaturen kan bereiken. Maak daarbij een schets van hoe de energie en entropie van dergelijk systeem varieert als functie van de temperatuur.

T1.2 Bereken de entropie van een systeem van $3N$ gekoppelde oscillatoren in drie dimensies. Dergelijk systeem is ook gekend als het model van Debye voor de warmtecapaciteit van vaste stoffen. Start je afleiding met het berekenen van de uitdrukking voor de partitiefunctie van één harmonische oscillator in een warmtebad. Verder kan je ondermeer gebruik maken van de volgende gegevens:

1. de energie-eigenwaarden van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking van een één-dimensionale harmonische oscillator: $\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$.
2. het aantal elastische golven met circulaire frequentie ω in een continu en isotroop medium wordt gegeven door
$$f(\omega) = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v_s^3} \ ,$$
met v_s de geluidssnelheid.
3. het verband tussen de vrije energie en de entropie wordt gegeven door
$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \ .$$

[T2] (20 PUNTEN): MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen enkel gebruikt worden:
  1. de cursusnota's
  2. (eventueel) de transparanten die de lessen begeleiden
  3. (eventueel) Appendix A (Physical Constants and Mathematical Relations) uit het boek Harvey Gould and Jan Tobochnik "Statistical and Thermal Physics"

Oefening 1 (10 punten)

Beschouw het éèndimensionaal en niet-relativistisch ideaal Fermi gas. De N deeltjes hebben een spin $S = \frac{3}{2}$ en een massa $m \neq 0$ en bewegen in een lengte L. De Hamiltoniaan van het systeem wordt gegeven door

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} .$$

O1.1 Bereken de canonische partitiefunctie van het systeem in DE KLASSIEKE LIMIET.

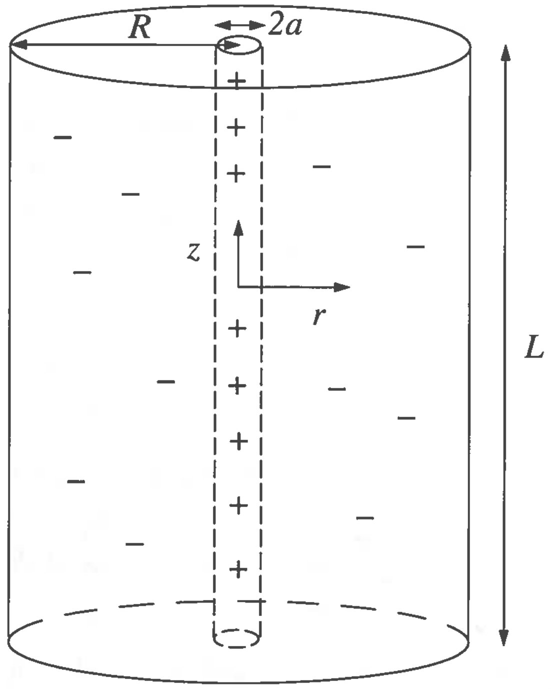
O1.2 Gebruik het resultaat uit voorgaand punt om de "druk" P (spanning) en de fugaciteit z van het systeem in DE KLASSIEKE LIMIET te berekenen. Zijn je resultaten in de lijn van de verwachtingen? Geef duidelijk aan waarom dat al dan niet zo is.

O1.3 Leid een uitdrukking af voor de "druk" in het systeem die geldig is onder alle omstandigheden (klassiek en kwantummechanisch). De uitdrukking voor de "druk" mag afhangen van de lengte L van het systeem, de temperatuur T en de fugaciteit z.

O1.4 Leid een uitdrukking af voor de entropie van het systeem die geldig is onder alle omstandigheden (klassiek en kwantummechanisch). De uitdrukking voor de entropie mag afhangen van de lengte L van het systeem, de temperatuur T en de fugaciteit z.

01.5 Bereken op basis van je resultaat van O1.3 de druk in het systeem voor temperaturen veel hoger dan de Fermi temperatuur. Toon aan dat je wel degelijk het resultaat van O1.2 reproduceert. Bereken ook de laagste-orde kwantummechanische correctie op dit resultaat.

Oefening 2 (10 punten)



Wanneer ionische polymeren (zoals DNA) opgelost worden in water dan gebeurt het volgende. Negatief geladen contra-ionen (met lading $-q$) splitsen zich af van het polymeer en vormen een oplossing met het water. De positief geladen resten (met lading $+q$) van de polymeren lossen niet op in het water en gaan door de elektrostatistische wisselwerking een staaf van positief geladen ionen gaan vormen (zie figuur).

Noem N het aantal negatief geladen contra-ionen. De contra-ionen interageren met de N positieve ionen in de staaf via een interactiepotentiaal gegeven door

$$U(r) = -\frac{2qN}{L} \ln \frac{r}{L} \; ,$$

met r de radiale coördinaat in de cylindrische geometrie (zie figuur). Dit betekent dat de netto interactie tussen de contra-ionen en de positieve ionen loodrecht staat op de positief geladen staaf.

Wanneer de Coulomb repulsie wordt verwaarloosd, dan kan het systeem van N negatief-geladen contra-ionen benaderend beschreven worden door de volgende hamiltoniaan:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{i=N} \left[\frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_i}{2m} \; + \; 2q^2 \frac{N}{L} \ln \left(\frac{r_i}{L} \right) \right] \; .$$

Bij het oplossing van de hiernavolgende vragen mag je veronderstellen dat het aantal contra-ionen N constant is en dat aan alle voorwaarden voldaan is opdat het totaal systeem zich in het “klassiek regime” zou bevinden. We veronderstellen verder dat het systeem zich bevindt in een cylindrisch volume (zie figuur).

02.1 Bereken de canonische vrij energie van het systeem van N contra-ionen als functie van T, $\frac{N}{L}$ en de stralen a en R (zie figuur).

O2.2 Bereken de waarschijnlijkheidsdistributie $p(r)$ voor de radiële positie van de deeltjes. Zorg ervoor dat

$$\int_{r=a}^{r=R} p(r)dr = 1 \ .$$

O2.3 Bereken $\langle r \rangle$ (de gemiddelde radiële positie van de contra-ionen). Maak een schets van $\langle r \rangle$ tegen een goed gekozen dimensieloze grootheid (je kunt hierbij veronderstellen dat $R \gg a$, zodat $\frac{a}{R} \approx 0$.) Wat is het gedrag van de berekende $\langle r \rangle$ in de limiet van "hoge" en "lage" temperaturen? Leg het resultaat bij deze twee limietsituaties uit op basis van je fysisch inzicht in the beschouwde systeem. Bij welke temperaturen is er een kanteling tussen het "hoge-temperatuur" en "lage-temperatuur" regime? Is dit in de lijn van je verwachtingen? Leg uit.

O2.4 Bereken de druk van de contra-ionen op de wand van de cylinder als een functie van de temperatuur. Je kunt ook hierbij veronderstellen dat $R \gg a$. Hoe reflecteert de transitie besproken in O2.3 zich op de druk in het system?