Oefeningenexamen Algebra I — 18 januari 2017

Veel succes!

Opgave 1. Beschouw een willekeurige groep G. Een automorfisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ noemen we *uniform* indien de afbeelding

$$f : G \to G : g \mapsto g^{-1}g^{\alpha}$$

surjectief is. Toon aan dat $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ uniform is als en slechts als

$$G \times G = \{(g,g) \mid g \in G\} \cdot \{(g, g^{\alpha}) \mid g \in G\}$$

waarbij we gebruik maken van Notatie 1.2.11. (Merk op dat we niet onderstellen dat G eindig is en het dus ook geen zin heeft om Stelling 1.6.16 te proberen toepassen.)

Opgave 2. Zij G een enkelvoudige groep van orde $2017^2 \cdot n$, waarbij n een natuurlijk getal is waarvan alle priemfactoren kleiner zijn dan 2017.

(a) Toon aan dat wanneer H een echte deelgroep is van G, dan $[G : H] \geq 2 \cdot 2017$.

(b) Leid hieruit af dat er geen enkelvoudige groep van orde $17 \cdot 2017^2 \cdot 2018 = 2 \cdot 17 \cdot 1009 \cdot 2017^2$ bestaat.

Opgave 3. Een ideaal $I \trianglelefteq R$ wordt *primair* genoemd wanneer $xy \in I$ impliceert dat $x \in I$ of $y^n \in I$ voor een $n \in \mathbb{N}$. Een ideaal $I \trianglelefteq R$ wordt *irreducibel* genoemd wanneer het niet te schrijven is als $I = I_1 \cap I_2$ met $I \neq I_1, I_2 \triangleleft R$. Toon aan dat in een Noetherse ring elk ideaal te schrijven is als de doorsnede van een eindig aantal primaire idealen. Ga als volgt te werk.

(a) Bewijs dat in een Noetherse ring elk ideaal te schrijven als de doorsnede van een eindig aantal irreducibele idealen.

(b) Toon als volgt aan dat ieder irreducibel ideaal $I \neq R$ van een Noetherse ring R primair is.

  (i) Stel dat $xy \in I$ voor zekere $x, y \in R$. Toon aan dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $y^{n+1}r \in I$ impliceert dat $y^n r \in I$ voor alle $r \in R$.

  (ii) Toon aan dat voor zulke x, y en n geldt dat $I = (xR + I) \cap (y^n R + I)$.

  (iii) Besluit, opnieuw voor deze x, y en n, dat $x \in I$ of $y^n \in I$.

Opgave 4. Zij R een ring en $I \trianglelefteq R$. Toon aan dat R/I een projectief R-moduul is als en slechts als I een hoofdideaal voortgebracht door een idempotent is. Een mogelijke werkwijze is de volgende.

Veronderstel dat R/I een projectief R-moduul is.

(a) Toon aan dat $R \cong I \oplus R/I$ als R-modulen.

(b) Bewijs dat I een hoofdideaal is voortgebracht door een idempotent.

Veronderstel nu omgekeerd dat I een hoofdideaal is voortgebracht door de idempotent $e \in R$.

(c) Toon aan dat $R \cong eR \oplus (1-e)R$ als R-modulen.

(d) Besluit dat R/I een projectief R-moduul is.