Beantwoord de vragen op de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam. De ongeruite bladen dienen als klad en moeten niet ingediend worden.

II. Parate kennis

1. Definieer het begrip *interval* en formuleer de *stelling van de vernestelde compacte intervallen.* (Geen bewijs!)
2. Formuleer de *M-test van Weierstrass.* (Geen bewijs!)
3. Formuleer de *convergentiestelling van Abel.* (Geen bewijs!)
4. Definieer wat een *stuksgewijze C^1 functie* is en formuleer de stelling betreffende de *convergentie van de Fourierontwikkeling.* (Geen bewijs!)
5. Formuleer de *grens-naar-grens transformatie van een integraal.* (Geen bewijs!)

III. Actieve bewijzen

1. Formuleer en bewijs de *extremumstelling van Weierstrass.*
2. Formuleer en bewijs de *eerste hoofdstelling* (afgeleide van een integraal met veranderlijke bovengrens).
3. Formuleer en bewijs de stelling die voldoende voorwaarden geeft om limiet en integraal om te wisselen.
4. Bespreek (met bewijs!) de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten $y'' + py' + qy = 0$.

IV. Passieve bewijzen

1. Beantwoord de vragen:

Stelling. *Als $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, dan bestaat er een rationaal getal $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+)$ waarvoor*

$$a < \frac{p}{q} < b. \tag{1}$$

Bewijs. Geval 1: $0 \leqslant a < b$. We kunnen een $q \in \mathbb{N}^+$ vinden waarvoor [1]

$$\frac{1}{q} < b - a.$$

Er bestaan ook $n \in \mathbb{N}^+$ waarvoor [2]

$$qa < n.$$

Zij p de *kleinste* van die n's [3], dan is $qa < p$ (dus $p \geqslant 1$ [4]) en $p - 1 \leqslant qa < p$, m.a.w.

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant a < \frac{p}{q}.$$

De laatste ongelijkheid is de eerste van (1). Uit de voorlaatste ongelijkheid halen we dat

$$\frac{p}{q} \overset{[5]}{<} b, \tag{2}$$

de tweede ongelijkheid van (1).

Geval 2: $a < 0 < b$. .... [6].

Geval 3: $a < b \leqslant 0$. ... [7].

$\square$

[1] Welke stelling wordt hier toegepast? Formuleer deze stelling.
[2] Verklaar.
[3] Waarom bestaat p?
[4] Waarom geldt deze ongelijkheid?
[5] Toon deze ongelijkheid aan.
[6] Bewijs dit geval.
[7] Bewijs dit geval.

2. Beantwoord de vragen:

Stelling (Taylorformule met restterm van Lagrange). *Is f van de klasse C^n $(n \geqslant 1)$ over het open interval $U \ni x_0$, dan bestaat er voor elke $x \in U$ in het compact interval met uiteinden x_0 en x een ξ_x waarvoor*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + (x - x_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}. \quad (3)$$

Bewijs. De formule is triviaal voor $x = x_0$. Daarom bekijken we een $x > x_0$; het geval $x < x_0$ verloopt analoog. Het volstaat te bewijzen dat [1]

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt = (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \quad (4)$$

voor zekere $\xi_x \in [x_0, x]$. De functie $f^{(n)}$ bereikt een grootste waarde M en een kleinste waarde m in $[x_0, x]$ [2]. Vandaar

$$m\frac{(x-x_0)^n}{n!} \overset{[3]}{\leqslant} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \overset{[4]}{\leqslant} M\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

We hebben dus

$$m \leqslant \frac{n!}{(x-x_0)^n} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \leqslant M.$$

De ingesloten term is dus gelijk aan $f^{(n)}(\xi)$ voor zekere $\xi_x \in [x_0, x]$ [5]. Hieruit volgt (4). □

[1] Met behulp van welke stelling kan men (3) uit (4) afleiden? Formuleer deze stelling.
[2] Welke stelling wordt hier gebruikt en hoe wordt ze toegepast?
[3,4] Verklaar. Leg elke van deze ongelijkheden uit.
[5] Benoem en formuleer de stelling waaruit dit volgt.

Examen Oefeningen Analyse 1

20 januari 2017

*Het examen duurt 4 uur. Gelieve de vragen op **aparte** bladen te beantwoorden. Veel succes!*

1. *(4 punten)* Bereken de primitieve

$$\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. *(4 punten)* Bepaal de convergentiestraal van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2 x^n}{3^n 2^{\ln n}}$$

en onderzoek de convergentie in de eindpunten van het convergentie-interval.

3. Zij

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi/2, \\ \sin(x) & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

(*a*) *(3 punten)* Ontwikkel f in een reeks van sinussen.

(*b*) *(1 punt)* Bespreek de convergentie van de gevonden reeks over het interval $[0, \pi]$.

(*c*) *(2 punten)* Toon aan dat

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1)}{4(2j+1)^2 - 1} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

4. *(6 punten)* Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + \alpha y = xe^{-x},$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ een parameter is.