De eerste pagina zijn de oefeningen voor de fysici, de tweede de oefeningen voor de wiskundigen, de derde het gemeenschappelijk theoriegedeelte van wiskundigen en fysici en de laatste twee pagina's zijn het theoriegedeelte van analyse IIB uitsluitend voor wiskundigen.

1ste Ba Fysica

9.VI.17

Analyse II oefeningen

(i) *Schrijf* ***naam*** *en* ***richting*** *boven elk blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*
(iv) *Een tekening is niet verplicht.*
(v) *Bij parametervoorstellingen: schrijf op hoe u aan uw parametervoorstelling komt. U moet de kenmerkende eigenschappen van een parametervoorstelling niet nagaan.*
(vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1. Bereken $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{ds}$, waarbij $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^3, x^2)$ en waarbij Γ de snijkromme is van $x^2 + y^4 = 1$ $(x \geq 0)$ en $x + y + z = 1$, doorlopen van $(0, 1, 0)$ naar $(1, 0, 0)$.

Vraag 2. Bereken de oppervlakte van het deel van $\Sigma \leftrightarrow z = x^2 + y^2$ dat voldoet aan de ongelijkheden $x \geq 0$ en $(x^2 + y^2)^2 \leq (x^2 - y^2)/4$.

Vraag 3. Zij $a, b, c > 0$. Bepaal het volume van het gebied dat bepaald wordt door de ongelijkheden $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$, $z \geq x$ en $x \geq 0$.

Vraag 4. Zij $L > 0$. Bepaal alle (reële) λ waarvoor de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0$$

onder de randvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y(L) = 0$ niet-triviale oplossingen heeft en bepaal deze oplossingen.

__________EINDE VAN DE OEFENINGEN__________

Tijd tot 18:00

1ste Ba Wiskunde

9.VI.17

Analyse II oefeningen

(i) *Schrijf **naam** en **richting** boven elk blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*
(iv) *Een tekening is niet verplicht.*
(v) *Bij parametervoorstellingen: schrijf op hoe u aan uw parametervoorstelling komt. U moet de kenmerkende eigenschappen van een parametervoorstelling niet nagaan.*
(vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1. Bereken $\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{ds}$, waarbij $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^3, x^2)$ en waarbij Γ de snijkromme is van $x^2+y^4=1$ $(x\geq 0)$ en $x+y+z=1$, doorlopen van $(0,1,0)$ naar $(1,0,0)$.

Vraag 2. Bereken de oppervlakte van het deel van $\Sigma \leftrightarrow z = x^2+y^2$ dat voldoet aan de ongelijkheden $x \geq 0$ en $(x^2+y^2)^2 \leq (x^2-y^2)/4$.

Vraag 3. Zij $a,b,c>0$. Bepaal het volume van het gebied dat bepaald wordt door de ongelijkheden $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 \leq 1$, $z \geq x$ en $x \geq 0$.

Vraag 4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $x'(t) = Ax(t)$ met

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 5/2 & 7/2 \\ 2 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

__________EINDE VAN DE OEFENINGEN__________

Tijd tot 18:00

1ste Ba Wiskunde – 9.6.2017
Analyse II

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgave.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Deel A

Vraag I.

1. Bewijs de volgende stelling.

   Stelling. *Voor alle $u > 0, v > 0$ geldt de identiteit*
$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

2. Toon aan dat
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)\, d\omega = \begin{cases} \cos x & \text{als } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{als } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag II.

1. Definieer (i) gladde kromme; (ii) eenvoudig gebied (van $\mathbb{R}^2$); (iii) lijnintegraal van een vectorveld langs een kromme; (iv) wervelvrij vectorveld.
2. Formuleer en bewijs de 'stelling van Green'.
3. Zij $G \subset \mathbb{R}^2$ een open gebied zonder gaten, en (P, Q) een glad vectorveld in G. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
   (a) (P, Q) is wervelvrij in G
   (b) (P, Q) is het gradiëntenveld van een scalairenveld van klasse C^2 in G
   (c) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ in G.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag III.

1. Formuleer (geen bewijs) de 'divergentiestelling'.
2. Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):
   (a) De functie $\varphi(x,y) = \left(x^2 - y^2, \dfrac{y}{x}\right)$ is een lokaal C^1-diffeomorfisme in elk punt van $\mathbb{R}^2$.
   (b) Een Lipschitzcontinue functie over $\mathbb{R}$ is gelijkmatig continu over $\mathbb{R}$.
   (c) Als $E \subset \mathbb{R}^2$ een eenvoudig gebied is, dan is $\text{opp}(E) = \dfrac{1}{2}\oint_{(\partial E)_+} x dy - y dx$.
   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\ln|x|)}{x}\, dx = 0$.
   (e) Zij K een compacte verzameling binnen de rechthoek $[0,1] \times [0,1]$ en zij $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continu en begrensd op $]0,1[\times]0,1[$. Stel $f_K(x) = f(x)$ als $x \in K$ en $f_K(x) = 0$ als $x \notin K$. Dan is f_K integreerbaar op $[0,1] \times [0,1]$.

NIEUW DUBBEL BLAD

(vervolgt met DEEL B)

Examen Analyse II-b, 1ste Ba Wiskunde, 9 ~~6~~ juni 2017

- Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op een van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgave.
- De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus *analoog* of *wegens de stelling van X*, dan mag u dat ook zo schrijven.
- Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.

Vraag I

1. Definieer de integraal voor een meetbare simpele afbeelding met niet-negatieve waarden. Indien nodig, definieer hierbij ook de begrippen die je in deze definitie gebruikt. Leg dan uit waarom deze integraal goed gedefinieerd is.
2. Toon aan dat de verzameling van rationale getallen $\mathbb{Q}$ Lebesgue maat nul heeft: $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.
3. De volgende eigenschap is gegeven.
   Eigenschap. *Zij* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *een maatruimte. Zij* $\{A_k\}$ *een rij meetbare verzamelingen met* $A_1 \cancel{\subset} A_2 \cancel{\subset} \ldots$ *en zij* $\mu(A_1) < \infty$. *Dan*
   $\supseteq \quad \supseteq \cdots$
   $$\mu(\cap_{k=1}^{\infty})A_k = lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$
   Toon aan dat de aanname $\mu(A_1) < \infty$ nodig is. Gebruik hiervoor bijvoorbeeld de dalende rij verzamelingen $\{A_k\}$ in $\mathbb{R}$, met $A_k = (k, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$.

Vraag II

1. Zij $A \in \mathcal{M}_n$ een $n \times n$ reële matrix. Toon dan aan dat 0 een stabiel kritiek punt is van $y'(t) = Ay(t)$ als en slechts als elke oplossing begrensd is op $[0, +\infty[$.
2. Zij A een 4×4 reële matrix.
   Het is bekend dat $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$, en $\lambda_3 = 2 + 3i$ eigenwaarden zijn. Of dit alle eigenwaarden zijn is niet bekend. Welke van de volgende beweringen is de enige juiste? Motiveer kort je antwoord.
   (a) Uit de gegevens volgt dat de matrix A niet diagonaliseerbaar is.
   (b) Uit de gegevens volgt dat de matrix A diagonaliseerbaar is en de oorsprong een niet stabiel evenwichtspunt is van de vergelijking $x' = Ax$.

(c) Uit de gegevens volgt dat de meetkundige multipliciteit van λ_1 groter dan 1 is, en de matrix is diagonaliseerbaar.

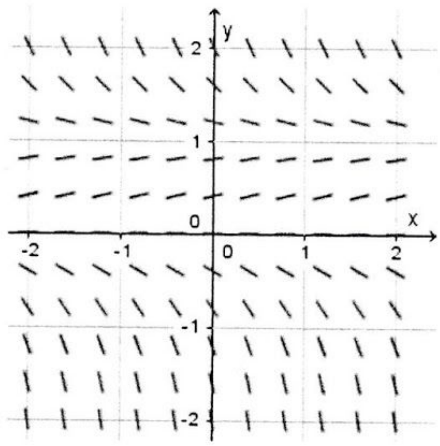
3. Gegeven het stelsel $x'(t) = Ax(t)$ met

$$x = \left(x_1(t), x_2(t)\right)^T, \quad A = \begin{pmatrix} -(2+\alpha) & 4 \\ 0 & 2-\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

bepaal voor welke waarden van de parameter α het evenwichtspunt $(0,0)$ een zadelpunt is.

Vraag III

1. Bekijk het richtingsveld bij de differentiaalvergelijking $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$.



(a) Welke twee constante functies zijn oplossing van deze differentiaalvergelijking?

(b) Toon aan dat functies van de vorm $f(x) = \dfrac{1}{1+Ae^{-x}}$ oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn.

2. Bewijs het volgende.
Stelling Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval en zij $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ continu. Als $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ oplossingen zijn van het homogene lineaire stelsel $x'(t) = A(t)x(t)$ dan

$$\exists t_0 \in I \text{ zodat } W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \quad \text{lineair onafhankelijk.}$$

(Met $W(t_0)$ noteren we de Wronskiaanse determinant in t_0)