Differentiaalmeetkunde I
Examen – 26.6.2017

Theorie (gesloten boek)

1. Zij $\mathbf{c}(s)$ en $\tilde{\mathbf{c}}(s)$ twee reguliere krommen (s is booglente voor beiden verondersteld). Men noemt de twee krommen congruent als er een verplaatsing f bestaat met $\tilde{\mathbf{c}} = f \circ \mathbf{c}$.

   (a) Veronderstel dat $\mathbf{c}(s)$ en $\tilde{\mathbf{c}}(s)$ congruent zijn. Bewijs dat ze dezelfde kromming en wringing hebben.

   (b) Neem omgekeerd aan dat $\mathbf{c}(s)$ en $\tilde{\mathbf{c}}(s)$ dezelfde kromming $1/\rho(s)$, overal verschillend van nul, en wringing $\tau(s)$ hebben. Noteer als $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ en $(\tilde{\mathbf{t}}(s), \tilde{\mathbf{n}}(s), \tilde{\mathbf{b}}(s))$ de respectievelijke triëders van Frenet. Kies een waarde s_0 en beschouw de orthogonale matrix A met

   $$\tilde{\mathbf{t}}(s_0) = A\mathbf{t}(s_0), \quad \tilde{\mathbf{n}}(s_0) = A\mathbf{n}(s_0), \quad \text{en} \quad \tilde{\mathbf{b}}(s_0) = A\mathbf{b}(s_0),$$

   en de constante vector $r_0 = \tilde{\mathbf{c}}(s_0) - A\mathbf{c}(s_0)$. Beschouw de isometrie $f(\mathbf{r}) = A\mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ van de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$. Toon aan dat $\tilde{\mathbf{c}} = f \circ \mathbf{c}$.

   (c) Beschrijf alle krommen in $\mathbb{R}^3$ met constante kromming $1/\rho > 0$ en wringing $\tau \equiv 0$.

   De formules van Frenet worden, indien nodig, gegeven door:

   $$\mathbf{t}' = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\frac{1}{\rho}\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}, \quad \text{met } \tau = \rho^2(\mathbf{t}\ \mathbf{t}'\ \mathbf{t}'').$$

2. (a) Wanneer noemt men een deelverzameling N van een n-dimensionale C^∞-variëteit M een k-dimensionale (reguliere) deelvariëteit? Beschouw een oppervlak $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ met meetkundig oppervlak Σ. Toon aan dat Σ een 2-dimensionale deelvariëteit is van $\mathbb{R}^3$.

   (b) Beschouw twee oppervlakken $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ en $\boldsymbol{\sigma}_V : V \to \mathbb{R}^3$, met respectievelijke meetkundige oppervlakken Σ en $\tilde{\Sigma}$. Wanneer noemt men de twee oppervlakken isometrisch? Toon aan dat ze isometrisch zijn als en slechts als er een nieuwe parametervoorstelling $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : U \to \mathbb{R}^3$ voor $\tilde{\Sigma}$ bestaat waarvoor de coëfficiënten van de eerste grondvorm gelijk zijn aan die van $\boldsymbol{\sigma}$.

   (c) Veronderstel dat $\Phi : \Sigma \to \tilde{\Sigma}$ een isometrie is. Beeldt Φ geodetische krommen van Σ af op geodeten van $\tilde{\Sigma}$? Leg uit waarom (niet).

   (d) Toon aan dat er geen isometrie bestaat tussen een deel van een boloppervlak en een deel van het vlak.

Oefeningen (open boek)

1. Beschouw de kromme $\mathbf{c}(t) = \left(\frac{1}{2}\sin 2t, \cos^2 t, \sin t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Bereken de kromming en de wringing in elk punt van de kromme.
   (b) Bewijs dat de kromme op een boloppervlak Σ met straal 1 ligt. Maak hiervan gebruik om aan te tonen dat
   $$\rho(t)^2 + \frac{\dot{\rho}(t)^2}{\tau(t)^2(1+\cos^2(t))} \equiv 1.$$
   (c) Bereken de geodetische kromming van de gegeven kromme op Σ.

2. Beschouw een touw T met een homogene massaverdeling en lengte L_0, voorgesteld door een vlakke kromme $x \mapsto (x, y(x))$, opgehangen tussen twee vaste eindpunten $A(0,h)$ en $B(d,h)$ $(L_0 > d)$. Een dergelijk touw is in evenwicht indien haar massamiddelpunt, gegeven door de vector
   $$\mathbf{r}_C = \frac{1}{L_0}\left(\int_T x\,ds, \int_T y\,ds\right)$$
   de laagst mogelijke positie inneemt. Bedoeling is de vorm $y(x)$ van het touw bij evenwicht te bepalen.
   (a) Bepaal de functionaal die bij dit probleem hoort en bepaal de binding.
   (b) Bepaal de Euler-Lagrangevergelijking waaraan de gezochte kromme moet voldoen.
   (c) Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van de Euler-Lagrange vergelijking (je moet de integratieconstanten dus NIET bepalen aan de hand van de beginvoorwaarden). *Hint: vermenigvuldig de Euler-Lagrangevergelijking met y'.*