Examen Theorie
Lineaire Algebra en Meetkunde II

Vraag 1 (2,5 ptn) Leg uit hoe men in een axiomatische affiene ruimte komt tot de begrippen "dimensie" en "basis" en verduidelijk het verband tussen deze twee.

Vraag 2 (2,5 ptn) Bewijs de volgende beweringen voor een affiene ruimte $\mathcal{A}$ van dimensie ten minste 3:

(1) De verzameling van dilataties van $\mathcal{A}$ is een groep voor de samenstelling

(2) De verzameling van verschuivingen van $\mathcal{A}$ is een groep voor de samenstelling.

(3) De groep der verschuivingen van $\mathcal{A}$ is commutatief.

(4) De groep der dilataties van $\mathcal{A}$ is niet commutatief.

Voor puntjes (3) en (4) mag je steunen op het bestaan van een verschuiving die een willekeurig punt a afbeeldt op een willekeurig punt b, en op het bestaan van een homothetie met gegeven centrum c die een willekeurig punt d afbeeldt op een willekeurig punt e, waarvoor c, d, e op één rechte gelegen zijn, en $c \notin \{d, e\}$.

Vraag 3 (2,5 ptn) Bewijs dat een σ-sesquilineaire vorm f met $\sigma^2 = 1$ reflexief is als en slechts als er een element $k \in \mathbb{K}$ bestaat met $kk^\sigma = 1$ en $f(v, w) = kf(w, v)^\sigma$, voor alle $v, w \in V$. Indien f niet alternerend is, dan is k gelijk aan $f(x, x)/f(x, x)^\sigma$, voor zekere $x \in V$ met $f(x, x) \neq 0$. Geldt dit voor elke $x \in V$ met $f(x, x) \neq 0$?

Vraag 4 (2,5 ptn) Gegeven een kegelsnede $\mathcal{K}$ met vergelijking $\varphi(x, y, z) = 0$, in het affiene reële vlak. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in een punt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{K}$. Bepaal ook de kwadratische vergelijking van de raaklijnen door een punt $(x_1, y_1, z_1) \notin \mathcal{K}$. Wat krijg je als je deze formule toepast voor een punt dat toch tot $\mathcal{K}$ behoort? Vermeld drie manieren om de vergelijkingen van de eventuele asymptoten vinden, waaronder een expliciete vorm van de kwadratische vergelijking van de asymptoten.

Succes!

Lineaire Algebra II - oefeningenexamen 2017/06/15

Nathan Steyaert, Thibaud Vandenhove

June 15, 2017

1. Zij $A = AG(5, q)$ met deelruimte van dimensie 3 V.
   (a) Hoeveel rechten in A zijn parallel met V en hoeveel daarvan disjunct met V?
   (b) Hoeveel driehoeken in A zijn evenwijdig met een gegeven driehoek?

2. Zij V een vectorruimte van dimensie $n \geq 2$ over een veld met karakteristiek 2. b is een bilineaire vorm met triviaal radicaal.
   (a) Zij b niet alternerend. Bewijs dat er een $e_1 \in V$ is met $b(e_1, e_1) \neq 0$ en dat de restrictie ervan tot de perp niet alternerend is.
   (b) Bewijs dat er een orthogonale basis bestaat t.o.v. b als en slechts als b niet alternerend is.

3. Zij B een bundel kegelsneden met niet-ontaarde exemplaren K_1 en K_2, en p een punt waarvan de poollijn t.o.v. K_1 gelijk is aan die t.o.v. K_2.
   (a) Bewijs dat er een unieke kegelsnede in de bundel zit waarvoor p een dubbelpunt is, en voor de andere kegelsneden valt de poollijn met p samen met die t.o.v. K_1 en K_2.
   (b) Hier waren twee kegelsneden gegeven. We moesten de ontaarde gevallen aanduiden, de punten die tot de bundel behoorden en p zoals hierboven.