Examen Logica

21 juni 2017

Het examen duurt 4 uur en is open boek. Gelieve vragen 1-4 en 5-6 op APARTE bladen te beantwoorden. Veel succes!

1. *(4 punten)* Zij $d \in \mathbb{N}$. Noteer met $\mathcal{U}$ de verzameling van alle open verzamelingen in $\mathbb{R}^d$.

   (a) Bepaal de kardinaliteit van $\mathcal{U}$.

   (b) Zij $(X, \leq)$ een goed geordende verzameling. Onderstel dat er een afbeelding $X \to \mathcal{U} : x \to U_x$ gegeven is met de eigenschap dat

   $$\forall x, y \in X : x < y \Longrightarrow U_x \subsetneq U_y.$$

   Toon aan dat X aftelbaar is.

2. *(4 punten)* Een graaf (V, E) is een verzameling V tesamen met een verzameling E van paren elementen uit V. Een verzameling $E_0 \subseteq E$ wordt een *woud* genoemd als E_0 geen cykel bevat, i.e., als er geen eindige rij $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n = v_0$, $n > 2$, van elementen uit V bestaat zodat $\{v_i, v_{i+1}\} \in E_0$ voor alle $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Zij (V, E) een graaf zodat er voor elke $v \in V$ een $w \in V$ bestaat zodat $\{v, w\} \in E$. Toon aan dat er een woud $E_0 \subseteq E$ bestaat zodat er voor elke $v \in V$ een $w \in V$ bestaat zodat $\{v, w\} \in E_0$.

3. *(4 punten)* Zij $(X, \leq)$ een lineaire ordening. Onderstel dat X een minimaal element 0 bevat. Voor $f : \mathbb{N} \to X$ definiëren we $\operatorname{supp}(f) := \{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$. Stel

   $$\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) := \{f \in X^{\mathbb{N}} : \operatorname{supp}(f) \text{ is eindig}\}.$$

   We definiëren als volgt een binaire relatie $\preceq$ op $\mathcal{F}(\mathbb{N}, X)$:

   $$f \preceq g \Longleftrightarrow f = g \text{ of } f(m) < g(m), \text{ met } m := \max\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}.$$

   (a) Toon aan dat $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, X), \preceq)$ een lineaire ordening is.

   (b) Toon aan dat $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, X), \preceq)$ goed geordend is als en slechts als $(X, \leq)$ goed geordend is.

4. *(4 punten)* Zij L een taal en zij T een L-theorie. Een *type* (over T) is een verzameling S van L-formules in één vrije variable x zodat voor elke eindige deelverzameling $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\} \subseteq S$ de theorie $\{\exists x(\varphi_0(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x))\} \cup T$ consistent is. Men zegt dat een type in een L-structuur $\mathcal{M}$ wordt *gerealiseerd* als $\mathcal{M} \models T$ en er een element $m \in M$ bestaat zodat $\mathcal{M} \models \varphi(m)$ voor elke $\varphi \in S$.

   (a) Zij L een taal en zij T een L-theorie. Toon aan dat er voor elk type S een L-structuur bestaat waarin S gerealiseerd wordt.

   (b) Zij $L = (0, 1, +, \cdot)$ en zij T de theorie van de velden. Toon aan dat er een type S bestaat zodat S in een veld K wordt gerealiseerd als en slechts als K geen priemveld is (een veld wordt een priemveld genoemd als het geen echte niet-ledige deelvelden bezit).

5. *(2 punten)* Zij L een taal zonder constanten en functiesymbolen en zij R een unair relatiesymbool in L. Voor een L-formule φ definiëren we inductief als volgt een L-formule φ^R:

   - $\varphi^R = \varphi$ als φ een atomaire formule is,
   - $(\neg\varphi)^R = \neg(\varphi^R)$,
   - $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^R = \varphi_1^R \circ \varphi_2^R$ voor $\circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$,
   - $(\exists x \varphi)^R = \exists x(R(x) \wedge \varphi^R)$,
   - $(\forall x \varphi)^R = \forall x(R(x) \rightarrow \varphi^R)$.

   Zij $\mathcal{M}$ een L-structuur met domein M. Stel $M_0 := R^{\mathcal{M}}$ en veronderstel dat M_0 niet leeg is. Zij $\mathcal{M}_0$ de deelstructuur van $\mathcal{M}$ met domein M_0. Toon aan dat voor alle L-formules φ in de vrije variabelen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en voor alle $m_1, \ldots, m_n \in M_0$ geldt dat:

   (a) $\mathcal{M} \models \varphi^R(m_1, \ldots, m_n)$ als en slechts als $\mathcal{M}_0 \models \varphi(m_1, \ldots, m_n)$.

   (b) Waarom hebben we in de opgave verondersteld dat L geen constanten en functiesymbolen bevat?

6. *(2 punten)* Geef gedecoreerde bewijsbomen voor volgende formules:

   (a) $\exists x(\varphi \vee \chi) \longleftrightarrow (\exists x \varphi \vee \exists x \chi)$,

   (b) $(\forall x \varphi \rightarrow \psi) \longleftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ (hierbij wordt verondersteld dat de variabele x niet optreedt in de formule ψ).