

Examen Projectieve Meetkunde (theorie), 15 januari 2017

Deel I

Vraag 1. Onderstel dat V een vectorruimte is over een veld \mathbb{F} met $\dim(V) \geq 2$. Stel $N = \{\gamma \in \Gamma L(V) \mid \langle \bar{v}^\gamma \rangle = \langle \bar{v} \rangle, \forall \bar{v} \in V\}$. Toon aan dat N gelijk is aan $\text{Sc}(V)$, de verzameling der scalaire lineaire afbeeldingen van V op zichzelf.

Vraag 2. Onderstel dat V een 2-dimensionale vectorruimte is over een veld \mathbb{F} . Beschouw punten p_1, p_2, p_3 en p_4 in $\text{PG}(V)$, waarbij p_1, p_2 en p_3 twee aan twee verschillend zijn. Wat verstaat men onder de dubbelverhouding $(p_1, p_2; p_3, p_4)$ van de punten p_1, p_2, p_3 en p_4 ? Is (u_i, v_i) met $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ een stel homogene coördinaten van p_i t.o.v. een vaste basis van V , toon dan aan dat

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_4 & v_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_4 & v_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}}.$$

Vraag 3. Onderstel dat β een orthogonale polariteit is van het projectief vlak $\text{PG}(V)$, waarbij V een 3-dimensionale vectorruimte is over een veld \mathbb{F} waarvan de karakteristiek verschillend is van 2. Noem C de kegelsnede bestaande uit alle absolute punten van β . Als $C \neq \emptyset$, toon dan aan dat

$$C = \{(0, 0, 1)\} \cup \{(1, y, y^2) \mid y \in \mathbb{F}\}$$

ten opzichte van een bepaalde goed gekozen basis van V .

Vraag 4.

- Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie $n \geq 2$ over een veld \mathbb{F} . Wat verstaat men onder de projectieve groep, de kleine projectieve groep en de unimodulaire groep van de projectieve ruimte $\text{PG}(V)$?
- Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie 3 over een veld \mathbb{F} van karakteristiek 2. Wat verstaat men onder het begrip *kern* van een niet-ledige absoluut irreduciebele kegelsnede C van $\text{PG}(V)$? Hoe kan men de coördinaten van de kern verkrijgen uit de kwadratische vergelijking die C beschrijft? Als p de kern is en L een rechte door p , wat zijn dan de mogelijkheden voor $|L \cap C|$?
- Wat verstaat men onder een directe som van projectieve ruimten?

- (d) Neem twee Griekse vlakken $\pi_g^{(1)}, \pi_g^{(2)}$, en twee Latijnse vlakken $\pi_l^{(1)}, \pi_l^{(2)}$ op de Klein kwadriek \mathcal{K} van $\text{PG}(5, \mathbb{F})$. Geef de mogelijkheden voor volgende doorsnijdingen: $\pi_g^{(1)} \cap \pi_g^{(2)}, \pi_l^{(1)} \cap \pi_l^{(2)}, \pi_g^{(1)} \cap \pi_l^{(1)}$. Met welke verzameling rechten van $\text{PG}(3, \mathbb{F})$ correspondeert elk van deze doorsnijdingen? Hoeveel vlakken liggen er op \mathcal{K} als \mathbb{F} het eindig veld \mathbb{F}_q met q elementen is?

Deel II

Vraag 5.

- (a) Onderstel dat \mathcal{P} een projectief vlak is. Voer coördinaten in voor \mathcal{P} (voeg verklarende tekeningen toe!).
- (b) Definieer de begrippen *affien vlak* en *projectief vlak*. Wat is, bij definitie, een *isomorfisme* tussen projectieve vlakken? Onderstel dat $\gamma: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ een isomorfisme is tussen de projectieve vlakken \mathcal{P} en \mathcal{P}' . Construeer het affiene vlak \mathcal{P}^L , waarbij L een willekeurige rechte is van \mathcal{P} . Is het beeld van \mathcal{P}^L onder γ ook een affien vlak? (Leg kort uit.)
- (c) Onderstel dat T een groep is, I een verzameling met $|I| \geq 3$, en $\{T_i \mid i \in I\}$ een verzameling deelgroepen van T zodat $\cup_{j \in I} T_j = T$. Onderstel ook dat voor alle $i, j \in I$ met $i \neq j$, $T_i T_j = T$ en $T_i \cap T_j = \{1\}$.
- (i) Onderstel dat $g \in T$, en beschouw een linkse nevenklasse hT_r , met $r \in I$ en $h \in T$, waarvoor $g \notin hT_r$. Bewijs dat er juist één linkse nevenklasse xT_k bestaat (met $k \in I$ en $x \in T$) die g bevat en disjunct is met hT_r .
- (ii) Bewijs dat T abels is.

Examen Projectieve Meetkunde (oefeningen), 18 januari 2017

Oefening 1. Een partiële k -spread in $PG(n, q)$ is een verzameling twee aan twee disjuncte k -ruimten in $PG(n, q)$. We noemen een partiële k -spread S maximaal als er geen partiële k -spread S' bestaat zodat $S \subset S'$. Een partiële 1-spread noemen we ook wel een partiële rechtenspread.

- (i) Toon aan dat een partiële rechtenspread in $PG(4, q)$ hoogstens $q^3 + q$ elementen bevat. Hoeveel elementen kan een partiële 2-spread in $PG(4, q)$ hoogstens bevatten?
- (ii) Toon aan dat een maximale rechtenspread in $PG(4, q)$ minstens $q^2 + 1$ elementen bevat. Toon ook aan dat een partiële spread die precies $q^2 + 1$ elementen bevat, in een hypervlak bevat moet zijn.

Oefening 2. Zij β een polariteit in $PG(n, \mathbb{F})$, $n \geq 3$. Veronderstel dat er drie absolute, snijdende, niet-concurrente rechten bestaan ten opzichte van deze polariteit. Toon aan dat $n \geq 5$.

Oefening 3. Zij Π een projectief vlak van de orde n , en zij π een deelvlak van Π van de orde m .

- lig?
metisch?
- (a) Bewijs dat $n \geq m^2$. (Hint: zij ℓ een rechte van π , en zij L de rechte van Π die hiermee correspondeert, dan bepaalt een punt P van $L \setminus \ell$ samen met een punt van π een rechte van Π . Tel hoeveel zulke rechten er zijn.)

Neem aan dat $n > m^2$.

- (b) Bewijs dat er een rechte M van Π bestaat die het deelvlak π niet snijdt.
- (c) Bewijs dat, in dit geval, $n \geq m^2 + m$.