Examen Redeneren, Abstraheren en Formuleren

Eric Laermans

2017-01-09
08:30

Naam:
Nummer studentenkaart:

Enkele opmerkingen vooraf:

- *U mag alle stellingen uit de syllabus, de slides of de oefeningenlessen gebruiken in een calculationele afleiding. U mag zelfs stellingen uit deze evaluatie gebruiken om een andere stelling te bewijzen. De enige voorwaarde is dat u geen cirkelredenering maakt! U mag dus bijvoorbeeld vraag 4 gebruiken om vraag 1 te bewijzen, maar dan mag u natuurlijk geen gebruik maken van vraag 1 om vraag 4 te bewijzen.*
- *Het belangrijkste in een calculationele afleiding is natuurlijk de correctheid. Ik hou echter ook rekening met de beknoptheid van de afleiding voor de quotering. Een nodeloos lange afleiding zal dan ook iets lager scoren.*
- *Geef altijd zo duidelijk mogelijk aan welke stellingen u gebruikt in de calculationele afleiding. U mag de afkortingen uit de syllabus gebruiken. U mag ook verwijzen naar de plaats waar de stelling terug te vinden is (pagina in syllabus, paginanummer in de slides van theorie- of oefeningenlessen, formulenummer uit dit examen). Essentieel is dat ik de stelling kan terugvinden zonder te veel puzzelwerk.*
- *Bij elke normale vraag (dus niet bij de bonusvragen) is het gewicht meegegeven van de vraag in de totale score van het examen. Dit gewicht is enerzijds een indicatie van het belang dat ik aan dit onderdeel hecht in deze cursus, anderzijds, bij vragen over een vergelijkbaar onderdeel, van de moeilijkheidsgraad van de vraag. Zo acht ik Vraag 3.3 inderdaad een stuk moeilijker dan vraag 3.2 (beide vragen over formulering). Maar het is eerder zinloos om de moeilijkheidsgraad van vraag 6.2 met deze van 3.1 te vergelijken (1 vraag over redeneren, de andere over formuleren). Elke vraag wordt verbeterd op 20 punten en het is het gewogen gemiddelde van deze resultaten die de eindscore van het examen vormt.*
- *De bonusvragen laten u eventueel toe om een extra punt te scoren (en zo een elders verloren punt te compenseren). Ze zijn echter vooral bedoeld voor wie al het grootste deel van de normale vragen correct opgelost heeft. Ze brengen immers vrij weinig punten op voor hun moeilijkheidsgraad en zullen (in tegenstelling tot de normale vragen) binair verbeterd worden: u krijgt het bonuspunt als uw oplossing correct is, op eventueel een paar details na; als er belangrijke fouten zijn in uw redenering krijgt u het bonuspunt niet. De maximale score voor het examen blijft natuurlijk 20 punten.*
- *Dit examen is dubbelzijdig afgedrukt. Vergeet de vragen aan de achterkant dus niet.*
- *Ja, er zijn vrij veel vragen, maar neen, ik verwacht geen echt lange antwoorden. U heeft normaal dus (ruim) voldoende plaats om uw oplossingen neer te schrijven.*

Vraag 1 (1 punt)

Gegeven de volgende propositie p:

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z \tag{1.1}$$

Bepaal met behulp van waarheidstabellen of de volgende propositie een nodige en/of voldoende voorwaarde is opdat p waar zou zijn:

$$x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \tag{1.2}$$

Vraag 2 (2 punten)

Bewijs volgende tautologie.
Maak *geen* gebruik van waarheidstabellen.
Als u gevalsanalyse gebruikt, mag u dit op slechts 1 veranderlijke toepassen.

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge \neg c) \quad \equiv \quad (a \wedge c) \vee (b \wedge \neg c) \tag{2.1}$$

Vraag 3

Vraag 3.1 (2 punten)

Formuleer de volgende uitspraak:
Een functie f is een bijectie van de verzameling X op de verzameling Y als en slechts als het domein van f gelijk is aan X, deze functie verschillende argumenten uit X altijd op verschillende waarden uit Y afbeeldt, en elk element van Y de beeldwaarde is van een element uit X onder de functie f.

Vraag 3.2 (1 punt)

Formuleer de volgende uitspraak:
Een verzameling S is aftelbaar oneindig als en slechts als er een bijectie bestaat van de verzameling van de natuurlijke getallen op deze verzameling S

Vraag 3.3 (3 punten)

De functie ShortSort neemt een eindige rij x van natuurlijke getallen als argument en geeft als resultaat terug een eindige rij van natuurlijke getallen, die alle waarden uit x éénmaal bevat en die stijgend gesorteerd is.

Beschrijf wiskundig de specificaties waaraan deze functie moet voldoen.

U hoeft geen concrete implementatie voor de functie te geven, maar uw specificaties moeten voldoende precies zijn dat een implementatie die aan uw specificaties voldoent effectief doet wat van de functie *ShortSort* verwacht wordt (cf. de hierboven gegeven omschrijving).

Hint: u mag hierij gebruik maken van het predicaat *asc* en van de teloperator \$, die we beide in de oefeningenlessen gezien hebben.

Vraag 4 (2 punten)

Bewijs volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned} & (\forall t : S \,.\, (Q(s) \wedge R_1(s,t)) \vee (\neg(Q(s)) \wedge R_2(s,t)) \quad \Rightarrow \quad P(t)) \\ \equiv \quad & (Q(s) \Rightarrow \forall t : S \,.\, R_1(s,t) \Rightarrow P(t)) \wedge (\neg(Q(s)) \Rightarrow \forall t : S \,.\, R_2(s,t) \Rightarrow P(t)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

waarbij S een niet-ledige verzameling is, P en Q predicaten over S zijn, en zowel R_1 als R_2 relaties over S zijn. Verder geldt $s \in S$.

Vraag 5 (2 punten)

Gegeven een (niet-ledige) verzameling X en een relatie R over X, zodat (X, R) een poset is.
Is $(X, R^{\smile})$ dan ook een poset?
Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
Ter herinnering: $R^{\smile}$ staat voor de inverse van de relatie R.

Vraag 6

Vraag 6.1 (2 punten)

Ik probeer te bewijzen dat:

$$(x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) \quad \Rightarrow \quad x \Rightarrow z \tag{6.1}$$

Ik bewijs dit als volgt:

$$\begin{aligned}(x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z) &\equiv \langle \text{Wet } \Rightarrow \rangle \quad (\neg x \vee z) \vee (\neg y \vee z) \\ &\equiv \langle \text{D} \vee / \vee \rangle \quad (\neg x \vee \neg y) \vee z \\ &\equiv \langle \text{DM} \rangle \quad \neg (x \wedge y) \vee z \\ &\equiv \langle \text{Wet } \Rightarrow \rangle \quad (x \wedge y) \Rightarrow z \\ &\Rightarrow \langle \text{W} \wedge \rangle \quad x \Rightarrow z \end{aligned} \tag{6.2}$$

Waar schuilt de fout? Leg ook uit waarom dit fout is.

Vraag 6.2 (2 punten)

Ik probeer te bewijzen dat er strikt negatieve natuurlijke getallen bestaan, m.a.w.:

$$\exists n : \mathbb{N} \,.\, n < 0 \tag{6.3}$$

Ik gebruik een bewijs uit het ongerijmde.
We veronderstellen dus dat $\forall n : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0)$ en leiden hieruit een contradictie af.

$$\begin{aligned}
&\forall n : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0) \\
&\quad \equiv \langle \text{E}\wedge; \text{LZ} \Rightarrow \rangle \quad \forall n : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0) \wedge ((\forall m : \mathbb{N} \,.\, m < 0 \Rightarrow m \notin \mathbb{N}) \Rightarrow 1) \\
&\quad \equiv \langle \text{Uitwisseling onder } \forall \rangle \quad \forall n : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0) \wedge ((\forall m : \mathbb{N} \mathbin{\dot\wedge} m < 0 \,.\, m \notin \mathbb{N}) \Rightarrow 1) \\
&\quad \equiv \langle \text{RPD} \Rightarrow / \forall \rangle \quad \forall n : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0) \wedge \exists m : \mathbb{N} \mathbin{\dot\wedge} m < 0 \,.\, m \notin \mathbb{N} \Rightarrow 1 \\
&\quad \equiv \langle \text{Uitwisseling onder } \exists \rangle \quad \forall n : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0) \wedge \exists m : \mathbb{N} \,.\, m < 0 \wedge (m \notin \mathbb{N} \Rightarrow 1) && (6.4) \\
&\quad \equiv \langle \text{D} \wedge / \exists \rangle \quad \forall n : \mathbb{N} \,.\, \exists m : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0) \wedge m < 0 \wedge (m \notin \mathbb{N} \Rightarrow 1) \\
&\quad \equiv \langle \text{LZ} \Rightarrow; \text{E}\wedge \rangle \quad \forall n : \mathbb{N} \,.\, \exists m : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0) \wedge m < 0 \\
&\quad \Rightarrow \langle \text{Universele instantiatie}; m \in \mathbb{N} \rangle \quad \exists m : \mathbb{N} \,.\, \neg(m < 0) \wedge m < 0 \\
&\quad \equiv \langle \text{CD}\wedge; \text{constante predicaten} \rangle \quad 0
\end{aligned}$$

We besluiten hieruit dat $\forall n : \mathbb{N} \,.\, \neg(n < 0)$ dus vals moet zijn en dat $\exists n : \mathbb{N} \,.\, n < 0$ daarmee bewezen is.
Waar schuilt de fout? Leg ook uit waarom dit fout is.

Vraag 7   (3 punten)

Gegeven de functie LS (afkorting van ListSplit) die als argument een eindige rij l van reële getallen neemt, en als beeldwaarde een twee-tupel teruggeeft van twee deellijsten ($LS\ l\ 0$ en $LS\ l\ 1$), die de opsplitsing vormen van l in twee bijna gelijke delen (met het tweede deel als kortste deel).
De implementatie is onbelangrijk, maar de functie wordt voldoende gespecificeerd door volgende eigenschappen (voor een willekeurige eindige rij l van reële getallen):

$$
\begin{aligned}
& & LS\,l\,0 \mathbin{+\!\!+} LS\,l\,1 = l \qquad & (7.1)\\
& & \#(LS\,l\,0) - \#(LS\,l\,1) = odd\,(\#x) \qquad & (7.2)\\
\#l > 1 & \Rightarrow & \#(LS\,l\,0) < \#l \qquad & (7.3)\\
\#l > 0 & \Rightarrow & \#(LS\,l\,1) < \#l \qquad & (7.4)\\
asc\,(l) & \Rightarrow & asc\,(LS\,l\,0) \wedge asc\,(LS\,l\,1) \qquad & (7.5)\\
asc\,(l) & \Rightarrow & \forall i : \mathcal{D}(LS\,l\,0)\,.\,\forall j : \mathcal{D}(LS\,l\,1)\,.\,(LS\,l\,0)\,(i) \le (LS\,l\,1)\,(j) \qquad & (7.6)
\end{aligned}
$$

waarbij $odd\,(n)$ staat voor "n is oneven" en $asc\,(l)$ staat voor "l is stijgend geordend", of formeler (met n een willekeurig natuurlijk getal en met l een willekeurige eindige rij van reële getallen):

$$
\begin{aligned}
odd\,(n) & \equiv \exists\, d : \mathbb{N}\,.\, n = 2 \cdot d + 1 \qquad (7.7)\\
asc\,(l) & \equiv \forall i, j : (\mathcal{D}l)^2\,.\, i < j \Rightarrow x\,(i) \le x\,(j) \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

We gebruiken de functie LS nu om een functie (SLI als afkorting voor SortedListInsert) te definiëren die een nieuw element v (een reëel getal) in een gesorteerde lijst l van reële getallen invoegt, met de bedoeling de sortering te behouden:

$$
\begin{aligned}
SLI\,(v,l) = (l = \epsilon)\,?\,\tau\,v \\
\mid (\sigma\,l = \epsilon)\,?\,((v \le l(0))\,?\,v \succ l \mid l \prec v) \\
\mid (v < (LS\,l\,1)\,(0))\,?\,(SLI\,(v,(LS\,l\,0))) \mathbin{+\!\!+} (LS\,l\,1) \\
\mid (LS\,l\,0) \mathbin{+\!\!+} (SLI\,(v,(LS\,l\,1)))
\end{aligned}
\qquad (7.9)
$$

Bewijs dat

$$\forall l : \mathbb{R}^*\,.\,\forall (x,v) : \mathbb{R}^2\,.\, x\ \$\ (SLI\,(v,l)) \ = \ x\ \$\ l + (x = v) \qquad (7.10)$$

(Deze eigenschap zegt dat $SLI(v,l)$ bestaat uit dezelfde elementen, in zelfde hoeveelheid, als l, waaraan v toegevoegd werd.)
U mag hierbij (zonder bewijs) alle eigenschappen uit de appendix gebruiken.

Vervolg Vraag 7

Bonusvraag 1 (1 bonuspunt)

Er zijn 4 verschillende dozen gegeven, telkens met bijhorend opschrift:

Doos A: $\boxed{\text{Het bonuspunt zit in doos A}}$

Doos B: $\boxed{\text{Het bonuspunt zit niet in doos A}}$

Doos C: $\boxed{\text{Het bonuspunt zit niet in doos C}}$

Doos D: $\boxed{\text{Het bonuspunt zit in doos D}}$

Slechts 1 van de 4 opschriften is correct en het bonuspunt zit slechts in 1 enkele doos.
Formaliseer dit raadsel met proposities (en verzamelingen indien nodig) en vind in welke doos het bonuspunt zit.
Opmerking: om het bonuspunt op deze vraag te behalen moet u de juiste doos aangeven, maar ook een correcte formulering geven van het probleem.

Bonusvraag 2 (1 bonuspunt)

Gegeven het volgende (gewijzigde) citaat van John Stuart Mill (cf. tweede indienopgave):
Hoewel het niet waar is dat alle conservatieven domme mensen zijn, is het wel waar dat sommige domme mensen conservatief zijn.
(We veronderstellen dat we het alleen over mensen hebben.)
Zijn volgende conclusies hieruit geldig?

1. Er zijn domme mensen die niet conservatief zijn.
2. Er zijn niet-domme mensen die conservatief zijn.

Bewijs uw antwoord.
Opmerking: om het bonuspunt op deze vraag te behalen moet u de geldigheid van beide conclusies correct evalueren en uw antwoord correct (wiskundig) aantonen.

Bonusvraag 3 (1 bonuspunt)

Gegeven de (recursieve) definitie van de Ackermannfunctie (A) voor willekeurige natuurlijke getallen m en n.

$$\begin{aligned} A\,(m,n) = (m = 0)\,?\,n+1 & \\ \nmid (n=0)\,?\,A(m-1,1) & \\ \nmid A(m-1, A(m,n-1)) & \end{aligned} \tag{B3.1}$$

Bewijs dat voor alle waarden van m en n deze recursieve definitie convergeert, m.a.w. bewijs dat:

$$\forall m,n : \mathbb{N}^2\ .\ A(m,n) \in \mathbb{N} \tag{B3.2}$$

U mag (zonder bewijs) gebruik maken van de eigenschap dat de optelling een gesloten bewerking is over de natuurlijke getallen, m.a.w.

$$\forall m,n : \mathbb{N}^2\ .\ m+n \in \mathbb{N} \tag{B3.3}$$

Opmerking: om het bonuspunt op deze vraag te behalen moet uw (inductief) bewijs correct zijn.

Appendix A

Hierna volgt een reeks eigenschappen die u zonder bewijs mag gebruiken in deze oefening.
Eigenschappen over de keuze-operator (met $(p,q) \in \mathbb{B}^2$, $(r,s,m,n) \in \mathbb{N}^4$, $(a,b,c) \in A^3$ met A een willekeurige verzameling, $(f,g,F,G) \in \mathcal{F}^4$, $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{D}F$, $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{D}G$, $(a,b) \in (\mathcal{D}f)^2$ en $a \in \mathcal{D}g$):

$$(p\,?\,r \nmid 0) = p \cdot r \tag{A.1}$$
$$(1\,?\,a \nmid b) = a \tag{A.2}$$
$$(0\,?\,a \nmid b) = b \tag{A.3}$$
$$(p\,?\,a \nmid a) = a \tag{A.4}$$
$$(\neg p\,?\,a \nmid b) = (p\,?\,b \nmid a) \tag{A.5}$$
$$(p\,?\,r \nmid s) + (p\,?\,m \nmid n) = (p\,?\,(r+m) \nmid (s+n)) \tag{A.6}$$
$$f\ (p\,?\,a \nmid b) = (p\,?\,f\ (a) \nmid f\ (b)) \tag{A.7}$$
$$(p\,?\,f \nmid g)\ (a) = (p\,?\,f\ (a) \nmid g\ (a)) \tag{A.8}$$
$$(p\,?\,F\ (p) \nmid G\ (p)) = (p\,?\,F\ (1) \nmid G\ (0)) \tag{A.9}$$
$$(p \Rightarrow q) \quad \Rightarrow \quad (p\,?\,F\ (q) \nmid a) = (p\,?\,F\ (1) \nmid a) \tag{A.10}$$
$$((a=b)\,?\,f\ (a) \nmid c) = ((a=b)\,?\,f\ (b) \nmid c) \tag{A.11}$$
$$(p\,?\,a \nmid (q\,?\,a \nmid b)) = ((p \vee q)\,?\,a \nmid b) \tag{A.12}$$
$$((p \wedge q)\,?\,(q\,?\,a \nmid b) \nmid c) = ((p \wedge q)\,?\,a \nmid c) \tag{A.13}$$
$$((p \wedge \neg q)\,?\,a \nmid ((\neg p \wedge q)\,?\,b \nmid c)) = ((\neg p \wedge q)\,?\,b \nmid ((p \wedge \neg q)\,?\,a \nmid c)) \tag{A.14}$$

Diverse eigenschappen over rijen en de teloperator \$ (met $(a,b) \in A^2$, $n \in \mathbb{N}$ en $(x,y) \in (A^*)^2$):

$$\sigma\ (a \succ x) = x \tag{A.15}$$
$$(x\ (0)) \succ (\sigma\ x) = x \tag{A.16}$$
$$a \succ \epsilon = \tau\ a \tag{A.17}$$
$$a \succ x = \tau\ a \mathbin{+\!\!+} x \tag{A.18}$$
$$\#\epsilon = 0 \tag{A.19}$$
$$\#(\tau\ a) = 1 \tag{A.20}$$
$$\#(a \succ x) = \#x + 1 \tag{A.21}$$
$$\#(x \prec a) = \#x + 1 \tag{A.22}$$
$$\#(x \mathbin{+\!\!+} y) = \#x + \#y \tag{A.23}$$
$$\tau\ a = \tau\ b \quad \equiv \quad a = b \tag{A.24}$$
$$\sigma(\tau\ a) = \epsilon \tag{A.25}$$
$$(\tau\ a)\ (0) = a \tag{A.26}$$
$$n \in 1..(\#x) \quad \Rightarrow \quad \#x = \#(\sigma^n\ x) + n \tag{A.27}$$
$$\mathcal{D}x = \square(\#x) \tag{A.28}$$
$$n \in 1..(\#x) \wedge i \in \square(\#x - n) \quad \Rightarrow \quad (\sigma^n\ x)\ (i) = x\ (i+n) \tag{A.29}$$
$$a\ \$\ \epsilon = 0 \tag{A.30}$$
$$a\ \$\ (x \mathbin{+\!\!+} y) = a\ \$\ x\ + a\ \$\ y \tag{A.31}$$
$$a\ \$\ (\tau\ b) = (a=b) \tag{A.32}$$
$$x \neq \epsilon \quad \Rightarrow \quad a\ \$\ x = (a = x\ (0)) + a\ \$\ (\sigma\ x) \tag{A.33}$$
$$a\ \$\ (b \succ x) = (a=b) + a\ \$\ x \tag{A.34}$$
$$a\ \$\ (x \prec b) = (a=b) + a\ \$\ x \tag{A.35}$$
$$(\forall a :\ A\,.\ a\ \$\ x = a\ \$\ y) \quad \Rightarrow \quad \#x = \#y \tag{A.36}$$

Enkele eigenschappen over stijgend geordende rijen (met $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ en $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$):

$$asc\ (\epsilon) \wedge asc\ (\tau\ a) \tag{A.37}$$

$$asc\ (a \succ x) \equiv asc\ (x) \wedge \forall i :\ \mathcal{D}x\ .\ a \leq x\ (i) \tag{A.38}$$

$$x \neq \epsilon \quad \Rightarrow \quad (asc\ (a \succ x)\ \equiv\ asc\ (x) \wedge a \leq x\ (0)) \tag{A.39}$$

$$asc\ (x \prec b) \equiv asc\ (x) \wedge \forall i :\ \mathcal{D}x\ .\ x\ (i) \leq b \tag{A.40}$$

$$x \neq \epsilon \quad \Rightarrow \quad (asc\ (x \prec b)\ \equiv\ asc\ (x) \wedge x\ (\#x - 1) \leq b) \tag{A.41}$$

$$asc\ (x\ +\!\!+\ y) \equiv asc\ (x) \wedge asc\ (y) \wedge \forall i,j :\ \mathcal{D}x \times \mathcal{D}y\ .\ x\ (i) \leq y\ (j) \tag{A.42}$$

$$y \neq \epsilon \quad \Rightarrow \quad (asc\ (x\ +\!\!+\ y)\ \equiv\ asc\ (x) \wedge asc\ (y) \wedge \forall i :\ \mathcal{D}x\ .\ x\ (i) \leq y\ (0)) \tag{A.43}$$

$$x \neq \epsilon \wedge y \neq \epsilon \quad \Rightarrow \quad (asc\ (x\ +\!\!+\ y)\ \equiv\ asc\ (x) \wedge asc\ (y) \wedge x\ (\#x - 1) \leq y\ (0)) \tag{A.44}$$

$$asc\ (x\ +\!\!+\ (\tau\ a)\ +\!\!+\ y) \equiv asc\ (x) \wedge asc\ (y) \wedge (\forall i :\ \mathcal{D}x\ .\ x\ (i) \leq a) \wedge (\forall i :\ \mathcal{D}y\ .\ a \leq y\ (i)) \tag{A.45}$$

En dan nog een wat technische eigenschap (met $(f,g) \in \mathcal{F}^2$ en $S \in \mathcal{T}$):

$$\begin{aligned} & P \in \mathsf{pred}_S \wedge (\mathcal{R}f \cup \mathcal{R}g) \subseteq S \wedge (\forall a : S\ .\ a\ \$\ f = a\ \$\ g) \\ & \qquad \Rightarrow \quad ((\forall i : \mathcal{D}f\ .\ P\ (f\ (i))) \equiv (\forall j : \mathcal{D}g\ .\ P\ (g\ (j)))) \end{aligned} \tag{A.46}$$

Op rijen toegepast (i.p.v. op algemene functies f en g), betekent dit informeel dat als twee rijen een permutatie zijn van elkaar, een eigenschap die geldig is voor alle waarden in de ene rij ook geldig is voor alle waarden in de andere rij. Zo uitgelegd, is de stelling wat triviaal, maar ik bespaar u graag de technische beslommeringen van het bewijs ervan.