Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (14 juni 2017)
Gesloten boek

Puntenverdeling: 0 - 4 - 3 - 3

0. Vraag op 0 punten.

1. Is een salamander een eukaryoot?
2. Is een aardappelplant een eukaryoot?
3. Is een vleesetende bacterie een eukaryoot?

1. Stabiliteit in een tweedimensionaal systeem.

Beschouw een tweedimensionaal dynamisch systeem bepaald door de vergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} &= g(x,y) \end{cases}$$

Onderstel dat f, g tenminste tweemaal continu afleidbaar zijn en dat de nulclines $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$, elkaar snijden in een punt (x_0, y_0) waar $f_x < 0$, $f_y > 0$, $g_x < 0$, $g_y < 0$.

Nu:

1. Toon aan dat het evenwichtspunt een regulier punt is van de nulclines $f(x,y) = 0$ en $g(x,y) = 0$ die er door gaan.
2. Maak een schets van de omgeving van het punt (x_0, y_0) waarop je de cordinaatrichtingen aanduidt, de nulclines met hun raaklijnen in het evenwichtspunt en pijltjes op de nulclines waarmee je de richting van de stroom aanduidt. Leg uit waarom je de pijltjes zo getekend hebt.
3. Bewijs dat (x_0, y_0) een stabiel equilibrium is.
4. Geef een voorbeeld van deze situatie waarbij (x_0, y_0) een stabiele focus is.
5. Geef een voorbeeld van deze situatie waarbij (x_0, y_0) een stabiele knoop is.

2. De periode-verdubbelende (flip - PD) bifurcatie.

Beschouw een PD bifurcatie die zich voordoet in een dynamisch systeem voor de parameterwaarde $\alpha = \alpha_0$. De centrale varieteit W_0^c kan daar lokaal geparametrizeerd worden door (τ, ξ), met een parametrizatie die periodiek is in τ met periode $2T$. Binnen deze centrale variëteit wordt de dynamica van het systeem beschreven door:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 + a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= c\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \end{cases} \tag{1}$$

waarbij $a, c \in \mathbb{R}$. We nemen aan dat $c \neq 0$.

In de buurt van de PD bifurcatie, d.w.z. voor nabijgelegen parameterwaarden α kan het dynamisch systeem geherformuleerd worden in W^c_α door

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 + \nu(\alpha) + a(\alpha)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= \beta(\alpha)\xi + c(\alpha)\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \end{cases} \tag{2}$$

waarbij $\beta(\alpha_0) = \nu(\alpha_0) = 0$ and $(a(\alpha_0), c(\alpha_0))$ samenvalt met (a, c) in (1).

Opgaven:

1. Bespreek de stabiliteit van de periodieke baan voor $\alpha = \alpha_0$.
2. Bespreek het dynamisch gedrag van het systeem in de buurt van $\alpha = \alpha_0$, in het bijzonder het bestaan en de stabiliteit van de periodieke banen in W^c_α, en wat er gebeurt als α nadert tot α_0.
3. Illustreer dit gedrag met enige schetsen.

3. <u>De Michaelis-Menten vergelijking.</u>

Een reactie van het Michaelis-Menten type kan schematisch voorgesteld worden als volgt:

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C \overset{k_2}{\rightarrow} P + E.$$

Hierbij wordt S het *substraat* genoemd, E is het *enzym*, C is het *intermediair dimeer* en P het *product*. In dit proces wordt het substraat geleidelijk omgezet in het product terwijl het enzym, waarvan de concentratie altijd klein is, uiteindelijk weer vrij komt. We noteren de concentraties van de vier stoffen met de corresponderende kleine letters.

In een typische toepassing is men geïnteresseerd in het tempo waarin P geproduceerd wordt als functie van s, m.a.w. de relatie tussen $\frac{dp}{dt}$ en s. Experimenteel vindt men door het plotten van $\frac{dp}{dt}$ als functie van s krommen die sterk gelijken op de plot van

$$\frac{dp}{dt} = V_{max}\frac{s}{J+s}, \tag{3}$$

voor gepaste waarden van de parameters V_{max} en J. De vergelijking (3) wordt de Michaelis-Menten vergelijking genoemd.

Geef een wiskundige verklaring voor dit verschijnsel en ga daarbij uit van de beginwaarden $s(0) = s_0 > 0$, $e(0) = e_0 > 0$, $c(0) = p(0) = 0$ met e_0 veel kleiner dan s_0.

Gent, 14 juni 2017

Prof. W. Govaerts

Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (14 juni 2017)
Open boek

Puntenverdeling: 5 - 5

Voor Matlab gebruiken we de versie 9.1 en voor MatCont de versie 6.6 (zoals tijdens de practica).

1. Studie van een afbeelding.

In de economie is duopolie de situatie waarin de markt voor een bepaald produkt beheerst wordt door twee concurrerende firma's, zeg A en B.

In een bepaalde modellering gaat men ervan uit dat A en B hun prijsniveau aanpassen aan dat van hun concurrent. Ieder van hen kiest zijn prijszetting op het volgende tijdstip zo dat zijn winst maximaal is als de concurrent zijn huidige prijs handhaaft. Meer precies, als op een bepaald ogenblik t de firma A een prijs x_t vraagt en B een prijs y_t, dan is de reactie daarop dat op het ogenblik $t+1$ A de prijs

$$x_{t+1} = f(y_t) = \sqrt{\frac{y_t}{a}} - y_t$$

zal vragen en B de prijs

$$y_{t+1} = g(x_t) = \sqrt{\frac{x_t}{b}} - x_t$$

zal vragen. Hierbij zijn a en b strikt positieve getallen die de productiekost van A, respectievelijk van B, per eenheid van productie voorstellen. Uiteraard moeten ook $x_t, y_t, x_{t+1}, y_{t+1}$ altijd strikt positief zijn.

Wiskundig komt dit neer op een afbeelding $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, waarbij

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{y}{a}} - y \\ \sqrt{\frac{x}{b}} - x \end{pmatrix}. \tag{1}$$

De opgaven zijn nu de volgende:

1. Bereken de vaste punten van deze afbeelding (wiskundig exact) (In de economie worden dit Cournot punten genoemd).
2. Bereken voor elk vast punt (wiskundig exact) het maximale open interval waarin de verhouding $\frac{a}{b}$ moet liggen opdat het vaste punt stabiel zou zijn.
3. Welk soort bifurcatie treedt op aan de eindpunten van dat interval?
4. Doe een numerieke simulatie van de afbeelding voor $a = 1, b = 6$, vertrekkende van $x = 0.1, y = 0.02$, met behulp van Matlab, Maple, Sage of een ander computationeel pakket. Doe die simulatie voor een duizendtal iteraties opdat zich een patroon zou aftekenen. Welk gedrag (periodiciteit) observeert u uiteindelijk? Geef de coördinaten van alle punten van de gevonden cykel.

[redacted]

5. Doe nu hetzelfde voor $a = 1, b = 4$. Is het eindgedrag verschillend en hoe verklaar je dat? Verklaar ook de waarden van de coördinaten van de gevonden cykel.

2. Continuatie van equilibria en periodieke banen.

Beschouw de situatie van Figuur 3.2 in Syllabus 2, dus het Morris-Lecar model waarvoor alle parameters, behalve v_3 en I_{app} gegeven zijn in Table 2.2 van Syllabus 2. We fixeren verder ook $v_3 = 15$.

1. Bereken door tijdsintegratie een equilibrium voor $I_{app} = 400$ en geef de waarden van V, w in dat punt
2. Start van dat punt om een kromme van equilibria te berekenen met I_{app} vrij en in het begin dalend. Geef de coördinaten van alle gevonden speciale punten en hun normaalvormcoëfficiënten. Welke conclusies kun je trekken uit de waarden van deze normaalvormcoëfficiënten? In welke intervallen zijn er stabiele equilibria? Zijn er intervallen met bistabiliteit van equilibria?
3. Bereken een kromme van periodieke banen, startend van een gevonden Hopf punt met I_{app} als vrije parameter. Gebuik daarbij 50 testintervallen ($ntst = 50$) en zet MaxStepsize op 1. Monitor I_{app}, de testfunctie voor limietpunten van periodieke banen, de multiplicatoren en de periode. Beschrijf het gedrag van deze variabelen tijdens de continuatie. Tijdens de continuatie ondergaat de periodieke baan een bifurcatie met eindige periode die niet als zodanig gedetecteerd wordt, maar die je gemakkelijk kunt afleiden uit het gedrag van de geobserveerde variabelen. Welke is dat en voor welke waarde van I_{app} treedt ze (ongeveer) op?

   Voor welke waarde van I_{app} (ongeveer, zo goed mogelijk berekend) eindigt de tak van periodieke banen? Welke bifurcatie treedt hier op? Geef een waarde van I_{app} waarvoor de periode groter dan 400 is.

Gent, 14 juni 2017

Prof. W. Govaerts