Oefeningenexamen Algebra II — 5 september 2017

Opgave 1. ~~(i)~~ Zij G een eindige groep en $\alpha : G \to G$ een groepsmorfisme waarvoor $\alpha^2 = \alpha$. Toon aan dat $G \cong \ker\alpha \rtimes \operatorname{im}\alpha$. (ii) Beschouw nu specifiek de groep $G = \mathbf{A}_4 \cong \mathbf{K}_4 \rtimes \mathbf{C}_3$. Bepaal *expliciet* drie verschillende morfismen $\alpha : G \to G$ waarvoor $\alpha^2 = \alpha$.

Opgave 2. Beschouw de actie van groep $(\mathbb{Z}, +)$ op de verzameling $\mathbb{Z}$ gegeven door

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : (x, u) \mapsto x + u.$$

(1) Geef alle imprimitiviteitsblokken die het element $0 \in \mathbb{Z}$ bevatten.
(2) Geef alle imprimitiviteitsblokken die het element $1 \in \mathbb{Z}$ bevatten.

Opgave 3. Beschouw het reële getal

$$\alpha = \sqrt{6 + \sqrt{11}}.$$

Noteer het splijtveld van het minimaalpolynoom van α over $\mathbb{Q}$ met K.

~~(1)~~ Toon aan dat $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
(2) Bepaal rationale getallen q_1 en q_2 zodat $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2})$.
~~(3)~~ Bereken de baan van α onder de actie van $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2})/\mathbb{Q})$. → 4.1.14
~~(4)~~ Concludeer uit (3) dat $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2})$. → voor formul

Opgave 4. (A) Beschouw een Galoisuitbreiding K/k met Galoisgroep $\mathrm{C}_2 = \langle\sigma\rangle$. Stel dat $uu^\sigma = 1$ voor zekere $u \in K$.

~~(i)~~ Toon aan dat de afbeelding $T : K \to K : x \mapsto x^\sigma u$ een morfisme van k-vectorruimten is met de eigenschap dat $T^2 = 1$.
~~(ii)~~ Toon aan dat het beeld van $(1 + T)$ in de eigenruimte van T met eigenwaarde 1 bevat is.
~~(iii)~~ Toon aan dat $1 + T$ niet de nulafbeelding is.
(iv) Concludeer dat er een $v \in K$ bestaat waarvoor $u = v/v^\sigma$.

(B) Beschouw nu twee gehele getallen $x, y \in \mathbb{Z}$ waarvoor $x^2 - 61y^2 = 1$. Toon aan dat er gehele getallen A en B bestaan zodat

$$x = \frac{A^2 + 61B^2}{A^2 - 61B^2} \text{ en } y = \frac{2AB}{A^2 - 61B^2}.$$