Oefeningenexamen Algebra I — 8 september 2017

Veel succes!

Opgave 1. Zij G een eindige groep en $H \leq G$.

(a) Toon aan dat een nevenklasse gH invariant is onder linkse vermenigvuldiging met elementen van H als en slechts als $g \in N_G(H)$.

(b) Zij p een priemgetal. Veronderstel dat H een p-groep is en dat $[G : H]$ deelbaar is door p. Toon aan dat dan ook $[N_G(H) : H]$ deelbaar is door p.

Opgave 2. Zij G een groep en $M \leq G$. We noemen M een *maximale deelgroep* indien $M \neq G$ en voor elke deelgroep $N \leq G$ met $M \leq N$ geldt dat $N = M$ of $N = G$.

Zij G nu een eindige groep waarvoor elke maximale deelgroep priem index heeft. Zij p de grootste priemdeler van $|G|$. Toon aan dat iedere Sylow-p-deelgroep een normaaldeler is.

[Hint: werk uit het ongerijmde, beschouw (indien mogelijk) een maximale deelgroep M die $N_G(P)$ bevat voor $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ en vergelijk $n_p(M)$ met $n_p(G)$.]

Opgave 3. Een ring R (steeds commutatief en met eenheid) wordt *von Neumann regulier (VNR)* genoemd indien er voor iedere $a \in R$ een $x \in R$ bestaat zodat $a = a^2x$. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn voor een ring R.

(a) R is von Neumann regulier.

(b) Voor elke twee idealen I en J van R is $I \cap J = IJ$.

(c) Ieder hoofdideaal $I \trianglelefteq R$ bevat een idempotent $e \in I$ zodat $I = (e)$.

Toon tot slot ook het volgende aan.

(d) Een von Neumann reguliere ring heeft geen niet-triviale (i.e. $\neq 0$) nilpotente elementen en ieder priemideaal is maximaal.

Opgave 4. Zij $R \neq 0$ een ring zodanig dat elk ideaal vrij is als R-moduul.

(a) Toon aan dat R een domein is.

(b) Toon aan dat elk ideaal een hoofdideaal is.