Beantwoord de vragen op de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden.

II. Parate kennis

1. Defineer *omschikking van een reeks, absoluut convergente reeks, betrekkelijk convergente reeks, wisselreeks.*
2. Definieer *convergente rij* en *deelrij*. Formuleer de *stelling van Bolzano-Weierstrass.* (Geen bewijs!)
3. Formuleer de *regel van de l'Hospital voor de limiet* $\frac{\infty}{\infty}$. (Geen bewijs!)
4. Formuleer de *hulpstelling van Riemann.* (Geen bewijs!)

III. Actieve bewijzen

1. Formuleer en bewijs de *tussenwaardestelling, bijzonder geval.*
2. Formuleer en bewijs de *driehoeksongelijkheid voor integralen.*
3. Zij (a_n) en (b_n) twee begrensde rijen van nietnegatieve reële getallen. Toon aan dat

$$\overline{\lim}\,(a_n \cdot b_n) \leq (\overline{\lim}\, a_n) \cdot (\overline{\lim}\, b_n).$$

4. Toon aan:

Stelling. *Zij U een open interval waarover de functies a en $R : U \to \mathbb{R}$ continu zijn. Dan worden de oplossingen over U van $y' + a(x)y = R(x)$ juist gegeven door*

$$e^{-\int a}\left(c + \int R e^{\int a}\right)$$

waarbij $c \in \mathbb{R}$ willekeurig is.

IV. Passieve bewijzen

1. Beantwoord de vragen:

Stelling. *Is $f \in C^1([-\pi, \pi])$, dan is*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f D_n = f(0).$$

$\frac{f(0+) + f(0-)}{2}$ (singuliere int. van dirichlet)

Bewijs. Het volstaat te bewijzen dat

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f - f(0)) D_n = 0. \ [1]$$

Omdat

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - f(0)) D_n = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{2\pi \sin \frac{x}{2}}}_{=:g(x)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \, dx$$

zal dit volgen uit de ... [2] op voorwaarde dat $g(x)$ continu is op $[-\pi, \pi]$. Er geldt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{2\pi \sin \frac{x}{2}} \overset{[3]}{=} \frac{f'(0)}{\cdot\ \pi},$$

zodat we $g(x)$ in $x = 0$ kunnen uitbreiden tot een continue functie. $\square$

[1] Verklaar.

[2] Vul in (geef de naam en de opgave van de stelling die toegepast wordt).

[3] Toon aan dat deze formule geldt.

[4] Definieer de functie $D_n(x)$.

[5] Gebruik de vorige stelling om de volgende stelling te bewijzen:

Stelling. *Als f 2π-periodiek is en van klasse C^1 op heel $\mathbb{R}$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van f op heel $\mathbb{R}$ naar f.*

2. Beantwoord de vragen:

Stelling. *Beschouw twee functies f en g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, met samengestelde*

$$F(x) = g(f(x)) \qquad (x \in \mathcal{D}_F).$$

Als f afleidbaar is in a en g afleidbaar in $f(a)$, dan is F eveneens afleidbaar in a, en

$$F'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Bewijs. 1. Vooreerst gaan we na dat a een inwendig punt van $\mathcal{D}_F$ is. Er bestaat een $\varepsilon > 0$ met $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\subseteq \mathcal{D}_g$ [1]. Omdat f continu in a is [2], bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor elke $x \in\ ]a - \delta, a + \delta[\cap \mathcal{D}_f$ geldt dat $f(x) \in\ ]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$. We kunnen δ zo klein kiezen dat $]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathcal{D}_f$ [3]. We besluiten dan dat voor alle $x \in\ ]a - \delta, a + \delta[$ geldt dat $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Vandaar $]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathcal{D}_F$ [4].

2. Als $f(x) \neq f(a)$ in een doorprikte omgeving van a, dan is

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{x \to a}{\to} g'(f(a)) \cdot f'(a) \tag{1}$$

(we maken hier gebruik van $f(x) \to f(a)$ als $x \to a$ [5]).

3. Blijft het geval waarbij $f(x_n) = f(a)$ zich voordoet voor zekere $a \neq x_n \in\ ]a - 1/n, a + 1/n[$ voor *elke* $n \geqslant 1$. Dan is $x_n \to a$. Omdat $f'(a)$ bestaat, is dan $f'(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0$ [6]. Er volgt dat

$$\left| \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{zodra } 0 < |x - a| \leqslant \delta_\varepsilon \text{ en } f(x) \neq f(a) \text{ [7]}.$$

Maar als $f(x) = f(a)$ geldt deze ongelijkheid triviaal. We besluiten dat ook in dit geval $F'(a) = 0 = g'(f(a))f'(a)$. □

[1] Verklaar.
[2] Waarom is f continu in a?
[3-4] Verklaar.
[5] Welke stelling wordt hier toegepast? Leg uit.
[6] Geef de naam van de stelling die hier toegepast wordt.
[7] Leg deze stap uit.
[8] Waarom is deel 1. van het bewijs nodig? M.a.w, waarom zou het bewijs onvolledig zijn als we enkel deel 2. en deel 3. van het bewijs zouden geven?

Examen Oefeningen Analyse I

21 augustus 2017

Het examen duurt 4 uur. Gelieve de vragen op ***aparte*** *bladen te beantwoorden. Veel succes!*

1. *(4 punten)* Bereken de primitieve
$$\int e^{3x}\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

2. *(4 punten)* Zij $a, b > 0$. Voor welke waarden van de parameters a en b is de reeks
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a(\ln n)^b}$$
convergent/divergent?

3. *(6 punten)*
   (a) Zij $a > 0$. Ontwikkel de functie $f(x) = e^{ax}$ in een Fourierreeks t.o.v. $[-\pi, \pi]$.
   (b) Naar welke waarde convergeert de Fourierreeks in het punt $x = \pi$?
   (c) Leid hieruit af dat
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a\tanh(\pi a)} - \frac{1}{a^2}\right).$$

4. *(6 punten)* Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
$$y'' - 7y' + 6y = e^x \sin^2(x).$$

$e^{-\int a}$