Differentiaalmeetkunde I
Examen – 9.9.2017

Theorie (gesloten boek)

1. Beschouw een $\mathcal{C}^2$-functie $F : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$, $(q, v, t) \mapsto F(q, v, t)$, en de corresponderende functionaal

$$J(q) = \int_{t_1}^{t_2} F(q(t), \dot{q}(t), t)dt,$$

gedefinieerd op krommen $q = (q^1, \ldots, q^n) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

   (a) Leg het standaardvraagstuk van de variatierekening uit (bespreek ook het concept van een familie van krommen rond een gegeven kromme $q(t)$ met vaste eindpunten).

   (b) Schets het bewijs van het grondlemma van de variatierekening: Zij g een continue, reëelwaardige functie gedefinieerd op een interval $[a, b]$ en veronderstel dat

$$\int_a^b g(t)\phi(t)dt = 0$$

   voor alle functies $\phi \in \mathcal{C}^2[a, b]$ met de eigenschap $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Dan is $g(t) = 0\ \forall t \in [a, b]$.

   (c) Toon aan dat een nodige voorwaarde opdat $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ een extremaal zou zijn van J, is dat de functies $q^i(t)$ oplossingen zijn van de Euler-Lagrangevergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

   Je mag gebruiken dat

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial q^i}(q(t), \dot{q}(t), t)\delta q^i(t) + \frac{\partial F}{\partial v^i}(q(t), \dot{q}(t), t)\delta \dot{q}^i(t)\right] dt.$$

2. Beschouw een oppervlak $\boldsymbol{\sigma} : U \to \mathbb{R}^3$ en een reguliere kromme $\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{\sigma}(q^1(t), q^2(t))$ op het oppervlak. Je mag aannemen dat de kromming van deze kromme in elk punt verschillend van nul is. Zij $\mathbf{N}$ het eenheidsnormaalvectorveld van het oppervlak en noteer kortweg $\mathbf{N}(t) := \mathbf{N}(q^1(t), q^2(t))$.

   (a) Wanneer noemt men de kromme op het oppervlak een asymptotische lijn? Toon aan dat voor een asymptotische lijn het osculatievlak in elk punt P van de kromme samenvalt met het raakvlak in P van het oppervlak.

   (b) Stel de differentiaalvergelijking van de asymptotische lijnen van het oppervlak op. Zij $K = (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)/(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$ de Gausskromming. Onderstel dat er op het oppervlak enkel elliptische punten liggen (nl. $K > 0$ overal). Hoeveel asymptotische lijnen gaan er door elk punt van het oppervlak? Leg uit waarom.

   (c) Wanneer noemt men de kromme op het oppervlak een krommingslijn? Toon aan dat de kromme een krommingslijn is als en slechts als

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}(t) = -\frac{1}{R(t)}\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t),$$

   voor een zekere scalaire functie $1/R(t)$. In dit geval, toon ook aan dat de corresponderende hoofdkromming van het oppervlak langs de kromme gelijk is aan $1/R(t)$.

Oefeningen (open boek)

1. Beschouw de vectorfunctie gegeven door

$$\mathbf{c}(t) = \left(\tfrac{1}{3}t^3 - 3t, 4t + 1, 2t^2\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Toon aan dat $\mathbf{c}(t)$ een reguliere kromme definieert.

   (b) Ga na dat de gelijkheid $\frac{1}{\rho} - 2\tau = 0$ geldt voor de kromming en de wringing van $\mathbf{c}(t)$.

   (c) Geef een booglengte voor $\mathbf{c}(t)$ in functie van t.

2. Beschouw het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = (x, y, xy^2)$$

   met $x > 0$ en $y > 0$.

   (a) Bepaal de eerste en tweede grondvorm van dit oppervlak.

   (b) Bepaal de asymptotische lijnen. Toon aan dat er door een willekeurig punt 2 asymptotische lijnen gaan, en dat minstens 1 van de 2 ook een geodetische lijn is ($x > 0$ en $y > 0$).

   (c) Bepaal de asymptotische lijnen door het punt $P(2, 1, 2)$.