

8

Examen "Kwantummechanica I": 4 september 2017

THEORIE (30 punten)

Antwoord bondig en gevat maar toch volledig!

HEEL VEEL SUCCES!

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

- We beschouwen een deeltje met massa $m \neq 0$ dat gedwongen wordt in één dimensie te bewegen. De hamiltoniaan van het deeltje wordt gegeven door

$$H(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + [V_0(x) + iV_1(x)] ,$$

met $V_0(x)$ en $V_1(x)$ twee reële potentialen. Start van de TDSE om een verband te leggen tussen de positiewaarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t)$ en de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x, t)$ van het deeltje.

- Orbitaal impulsmoment wordt gedefinieerd door $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
 - (a) Wat is de corresponderende kwantummechanische operator in de coördinatenruimte?
 - (b) Wat is de corresponderende kwantummechanische operator in de impulsruimte?
 - (c) Geef de wiskundige definitie en de fysische interpretatie van de volgende twee grootheden ($L \equiv |\vec{L}|$)

$$\Delta L, \quad \Delta \vec{L}.$$

- (d) Onder welke omstandigheden is \vec{L} een behouden grootheid? Met andere woorden, welke voorwaarden moeten voldaan worden opdat

$$\frac{d\langle \vec{L} \rangle}{dt} = \vec{0} ?$$

- (e) Bepaal het kwantummechanisch equivalent van de volgende klassieke uitdrukking

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN (20 punten)

- **BELANGRIJK:** Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- **BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL GEBRUIKT WORDEN**
 1. de cursusnota's (TRANSPARANTEN)
 2. het handboek "Quantum Mechanics" van Bransden en Joachain
 3. lijst met integralen uit het boek van Michael A. Morrison

OEFENING 1 (10 PUNTEN): DEELTJE IN EEN POTENTIAAL

De genormeerde golffunctie $\Psi(x, t)$ van een deeltje met massa $m > 0$ dat beweegt onder de invloed van een potentiaal $V(x)$ wordt gegeven door

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} xe^{-\beta x} e^{-\frac{i}{\hbar} \gamma t} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

waarbij β en γ twee reële constanten zijn.

1. Maak een schets van de golffunctie $\Psi(x, t = 0)$ waarbij je alle relevante kenmerken duidelijk aangeeft.
2. Gebruik je kennis van $\Psi(x, t)$ om een KWALITATIEVE schets van de potentiaal $V(x)$ te maken. De schets moet duidelijk tonen waar de "klassieke verboden gebieden" en de "klassieke keerpunten" zich bevinden.
3. Bereken de verwachtingswaarde van de energie van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
4. Bereken de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
5. Bereken de verwachtingswaarde van de impuls van het deeltje op een arbitrair tijdstip $t > 0$?
6. Kun je voor het beschouwde systeem energie-eigen toestanden met een energie groter of kleiner dan de energie verwachtingswaarde horend bij $\Psi(x, t)$ verwachten?
7. Bepaal de potentiaal $V(x)$ in termen van de variabelen $(\beta, \gamma, m, \hbar)$ en bepaal de waarde van γ . Komt je resultaat overeen met de kwalitatieve schets voor $V(x)$ die je eerder maakte?

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa m beweegt in één dimensie met een golffunctie gegeven door:

$$\psi(x) = C e^{iqx} e^{-\alpha x^2},$$

waarbij $C \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$, en $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) Bepaal de constante C en bereken de waarschijnlijkheidsstroombichtheid van het deeltje.
- (ii) Bereken de verwachtingswaarde $\langle p \rangle$ van de impuls rechtstreeks uit de bovenstaande golffunctie $\psi(x)$.
- (iii) Bereken de corresponderende golffunctie $\phi(p)$ in de impulsruimte en bereken hiermee EXPLICIET de verwachtingswaarde $\langle p \rangle$. Is je resultaat compatibel met wat je in punt (ii) bekomen hebt?
- (iv) Bereken expliciet de verwachtingswaarde $\langle p^2 \rangle$. Maak een schets van hoe $\langle p^2 \rangle$ afhangt van de parameter α . Is je resultaat in de lijn van de fysische verwachtingen?
- (v) Bereken expliciet $\Delta x \Delta p$. Becommentarieer je eindresultaat voor $\Delta x \Delta p$. Voldoet het aan de fysische verwachtingen?