THEORIE

Opgave 1. (5 punten). In deze opgave wordt gevraagd om een aantal argumenten of overgangen uit de cursusnota's in detail te verklaren.

Deeltjes (a)–(c) peilen naar het inzicht in het bewijs van Stelling 2.5.2 op p. 62.

(a) De tweede regel van het bewijs zegt: "Stel dat de verzameling $S = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}\}$ een basis is van $\operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$". Waarom kan je dit stellen?

(b) Verderop staat: "Uit $A = CE$ volgt dat iedere rij R_i van A een lineaire combinatie is van $\{E_1, \ldots, E_s\}$". Verklaar dit.

(c) Verklaar hoe hieruit volgt dat

$$r = \dim \operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m) \leq \dim \operatorname{span}(E_1, \ldots, E_s) \leq s.$$

In delen (d)–(f) peilen we naar het inzicht in enkele begrippen uit Hoofdstuk 7.

(d) In Opmerking 7.1.2 staat: "Merk op dat $\angle(v, w) = 0$ als en slechts als v en w een positief veelvoud zijn van elkaar, en dat $\angle(v, w) = \pi$ als en slechts als v en w een negatief veelvoud zijn van elkaar". Bewijs deze uitspraken.

(e) In Definitie 7.2.1(ii) staat vermeld dat "gelijk georiënteerd zijn" een equivalentierelatie definieert op de verzameling van geordende basissen. Wat betekent dit? Leg uit waarom dit inderdaad een equivalentierelatie is.

(f) Onderaan Definitie 7.3.2 staat: "Het is duidelijk dat een affiene deelruimte D van dimensie k uniek bepaald is door 1 plaatsvector en k lineair onafhankelijke richtingsvectoren". Verklaar dit.

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 2. (5 punten). In deze opgave wordt getoetst in hoeverre je vertrouwd bent met de verschillende begrippen en eigenschappen die we in de cursus ontmoet hebben.

(a) Zij K een veld, en V een willekeurige K-vectorruimte. Zij $f \in \operatorname{End}_k(V)$ een lineaire operator. Veronderstel dat $f(f(v)) = v$ voor alle $v \in V$. Toon aan dat f een automorfisme is van V.

(b) Zij K een veld, en U, V, W eindig-dimensionale K-vectorruimten. Toon aan dat $\operatorname{Hom}_K(U \oplus V, W) \cong \operatorname{Hom}_K(U, W) \oplus \operatorname{Hom}_K(V, W)$.

(c) Gegeven is een $m \times n$-matrix $A \in M_{m,n}(K)$. Beschouw de lineaire afbeelding $L_A \colon K^n \to K^m \colon v \mapsto Av$. Toon aan dat L_A surjectief is als en slechts als $\operatorname{rk}(A) = m$. Toon aan dat L_A injectief is als en slechts als $\operatorname{rk}(A) = n$.

(d) Zij f een symmetrische operator op $\mathbb{R}^3$. Zoals we weten (Gevolg 6.3.4) bestaat er steeds een orthonormale basis van eigenvectoren voor f. Dit wil echter niet zeggen dat *elke* basis van eigenvectoren voor f ook orthogonaal zou zijn. Geef een voorbeeld van een dergelijke f, samen met een basis van eigenvectoren voor f die geen orthogonale basis is.

(e) Gegeven is het Euclidische vlak $V = \mathbb{R}^2$, met twee rechten $L = x$-as en $M = y$-as. Geef een voorbeeld van een lineaire operator $f \in \mathrm{End}(V)$ zodat $f(L)$ en $f(M)$ twee parallelle rechten zijn.

Oefeningen

Begin een nieuw geruit blad.

Opgave 3. (4 punten)

(a) Zij $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ een reële $n \times n$ matrix waarvoor $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Toon aan dat 1 steeds een eigenwaarde is van A.

(b) Beschouw nu volgende matrix, met a, b parameters in $\mathbb{R}$.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1-b & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden van B.

(c) Bepaal a en b waarvoor er een eigenwaarde is met meetkundige multipliciteit groter dan 1. Motiveer je antwoord.

Opgave 4. (3,5 punten) Beschouw, in de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$, een rechte L gegeven door de vergelijkingen $2x = y = 2z - 2$ en een vlak α gegeven door de vergelijking $x + y + z = 1$. Een lichtstraal valt in langs de rechte L, weerkaatst op α en vervolgt langs de rechte L'. De rechte L' gaat dus door $L \cap \alpha$, ligt in het vlak opgespannen door L en de normaal N van α in het punt $L \cap \alpha$ en de hoek tussen L' en N is dezelfde als deze tussen L en N.

(a) Bepaal het snijpunt van L en α.

(b) Geef de geassocieerde vectordeelruimten L_0 van L, en N_0 van N.

(c) Bepaal een voorstelling van de rechte L' als affiene deelruimte (dus als $p_0 + W$, met p_0 een punt van L' en met W een vectordeelruimte).

Opgave 5. (2,5 punten) Beschouw de volgende lineaire afbeelding:

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z)^t \mapsto (x - 5y + 4z, 2x - 3y + z, -x + y)^t.$$

(a) Bepaal $\dim(\ker f)$.

(b) Bepaal een orthonormale basis van $\mathrm{im}\, f$ ten opzichte van het standaard inproduct.