# Examen Logica

31 augustus 2017

*Het examen duurt 4 uur en is open boek (gsm's, laptops, tablets, etc. zijn niet toegestaan!). Gelieve vragen 1-4 en 5-6 op* ***aparte*** *bladen te beantwoorden. Veel succes!*

1. *(4 punten)* Zij $X$ een verzameling. We definiëren als volgt een equivalentierelatie $\sim$ op $X^{\mathbb{N}}$:
$$(a_n)_n \sim (b_n)_n \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_n = b_n,$$
voor $(a_n)_n, (b_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$.
   (a) Toon aan dat $|X^{\mathbb{N}}/\sim| = 2^\kappa$ als $|X| = 2^\kappa$ met $\kappa \geq \omega$.
   (b) Toon aan dat $|X^{\mathbb{N}}/\sim| = 2^\omega$ als $|X| = \omega$. (*Hint*: Toon eerst aan dat voor $(a_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ willekeurig maar vast geldt dat
$$|\{(b_n)_n \in X^{\mathbb{N}} : (b_n)_n \sim (a_n)_n\}| = \omega.)$$

2. *(3,5 punten)* Voor $A \subseteq \mathbb{R}$ noteren we het deelveld van $\mathbb{R}$ voortgebracht door $\mathbb{Q}$ en $A$ met $\mathbb{Q}(A)$. Bewijs met behulp van het lemma van Zorn dat er een verzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ bestaat zodat
   (i) voor elk niet-nul polynoom $P(x_1, \ldots, x_n)$ met rationale coëfficiënten en alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ geldt dat $P(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.
   (ii) voor elke $r \in \mathbb{R}$ er een niet-nul polynoom $P(x)$ met coëfficiënten in $\mathbb{Q}(A)$ bestaat zodat $P(r) = 0$.

3. *(4 punten)* Zij $(X, \leq)$ een lineaire ordening. $X$ wordt *transitief* genoemd als er voor alle $x, y \in X$ een order-isomorfisme $f : X \to X$ bestaat zodat $f(x) = y$. Analoog noemen we $X$ *2-transitief* als $X$ transitief is en er voor alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ met $x_1 < x_2$ en $y_1 < y_2$ een order-isomorfisme $f : X \to X$ bestaat zodat $f(x_1) = y_1$ en $f(x_2) = y_2$.
   (a) Toon aan dat $\mathbb{Z}$ transitief maar niet 2-transitief is.
   (b) Toon aan dat $\mathbb{R}$ 2-transitief is.
   (c) Toon aan dat elke 2-transitieve lineaire ordening $(X, \leq)$ dicht is (i.e., voor alle $x, y \in X$ met $x < y$ bestaat er een $z \in X$ zodat $x < z < y$).

4. *(3,5 punten)* Een graaf $G = (V, E)$ is een verzameling toppen $V$ met daarop een symmetrische irreflexieve binaire relatie $E$. De graaf $G$ wordt *samenhangend* genoemd als voor alle $x, y \in V$ met $x \neq y$ er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat en $x_i \in V$, $i = 0, 1, \ldots n$, zodat $x_0 = x$, $x_n = y$, en $x_i E x_{i+1}$ voor $i = 0, \ldots, n-1$. Zij $L$ de taal die bestaat uit één binair relatiesymbool $E$ en $\varphi$ een $L$-zin die waar is voor elke samenhangende graaf. Toon aan dat er een niet-samenhangende graaf is die $\varphi$ waarmaakt.

5. *(2 punten)* Zij $L$ een taal en $M$ een $L$-structuur. Stel dat $s_i, t_i$, $i = 1, \ldots, n$, gesloten $L_M$-termen zijn met $t_i^M = s_i^M$ voor alle $i = 1, \ldots, n$. Zij $\varphi$ een $L_M$-formule met vrije variabelen bevat in $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Toon aan dat $M \models \varphi(t_1, \ldots, t_n)$ als en slechts als $M \models \varphi(s_1, \ldots, s_n)$. (*Hint*: Pas inductie toe op $\varphi$. Indien nodig pas eerst nog een inductie toe op de gesloten $L_M$-termen.)

6. *(3 punten)*

   (a) Geef een gedecoreerde bewijsboom voor

   $$(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \leftrightarrow (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

   (b) Zij $\Gamma$ een verzameling formules. Onderstel dat

   $$\Gamma, \varphi(y) \vdash \psi,$$

   waarbij de vrije variabele $y$ niet voorkomt in de elementen van $\Gamma$ en $\psi$. Toon aan dat

   $$\Gamma, \neg\forall x \neg\varphi(x) \vdash \psi.$$