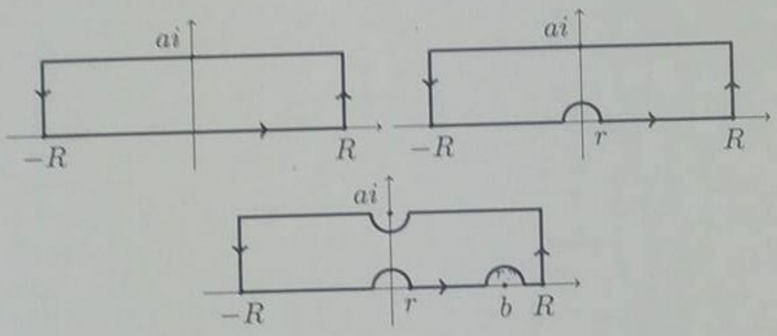
Oefeningenexamen complexe analyse

1. Zij $0 < b < 2$ ($b \neq 1$). Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bx}}{(e^x+4)^2} dx,$$

door een gepaste functie langs een contour Γ zoals in figuur II te integreren. ($a = 2\pi$)



Figuur II

2. Verklaar of weerleg de stappen in de volgende redenering:

Stelling 1 *Zij f een holomorfe functie met essentiële singulariteit z_0. Dan is $f(B'(z_0,\varepsilon))$ een dichte verzameling in $\mathbb{C}$ voor elke $\varepsilon > 0$.*

Bewijs. Veronderstel dat er $c \in \mathbb{C}$ en $\delta > 0$ bestaan zodat $|f(z) - c| > \delta$ voor alle $z \in B'(z_0, \varepsilon)$ [1]. Hieruit volgt dat

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{-1} |f(z) - c| \overset{[2]}{=} \infty$$

Hieruit volgt dat $(f(z) - c)/(z - z_0)$ een pool heeft in z_0 [3], zegge van orde N. Dan is

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^N |f(z)| \overset{[4]}{\leq} \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^N |f(z) - c| \overset{[5]}{=} 0.$$

Hieruit volgt dat z_0 geen essentiële singulariteit kan zijn van f [6], een contradictie. □

[1] Waarom zal het volstaan dit te ontkrachten?
[2 - 6] Verklaar.

3. Zij f een gehele functie. Veronderstel dat er voor iedere $z \in \mathbb{C}$ een $n \in \mathbb{N}$ (die mag afhangen van z) bestaat zodat $f^{(n)}(z) = 0$. Toon aan dat f een polynoom is.

4. Zij f holomorf op $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Er geldt voor alle $z \in \mathbb{D}$ dat $|f(z)| \leq |f(z^2)|$. Toon aan dat f constant is.