Analyse

Theorie

Deel A (voor de fysici op 12 punten, voor de wiskundigen op 7,5 punten)

1. a) Definieer.
   i. ophopingspunt
   ii. de partieel afgeleide voor een functie van twee veranderlijken
   iii. glad oppervlak
   iv. de oppervlakte-integraal voor een continu scalairenveld

   b) Formuleer (geen bewijs) de eerste hoofdstelling voor lijnintegralen.

   c) i. Formuleer en bewijs de middelwaardestelling voor dubbelintegralen.
   ii. Bewijs: als $f(x,y)$ continu is over een rechthoek $R \subset \mathbb{R}^2$ en $f(x,y) > 0$ voor alle (x,y) in R, dan is $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$.

2. a) Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano voor continue functies.

   b) Formuleer de stelling van Stokes.

   c) Antwoord enkel met ja of nee.
   i. Als $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ bestaan, dan is f afleidbaar in (a,b).
   ii. Stel $E \subset \mathbb{R}^2$ een eenvoudig gebied, dan is

$$\oint_E \frac{\sin(2y)}{2} - y\mathrm{d}x + 2x\cos^2(y)\mathrm{d}y = 2 \cdot \mathrm{opp}(E)$$

   .

   iii. $F(x,y) = (2xy\cos(x^2y), x^2cos(x^2y))$ is een wervelvrij vectorveld.

3. a) De functie $\mathcal{F} : f(t) \to \mathcal{F}(f(t))$ die iedere functie $f(x)$ afbeeldt op zijn Fouriergetransformeerde $\hat{f}(\omega)$ noemt men een Fourier transformatie. Bewijs dat deze lineair is of dus dat

$$\mathcal{F}(af(t) + b(g(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) + b\mathcal{F}(g(t))$$

   b) Er is gegeven dat

$$\hat{g}(\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad \text{en dat} \quad \hat{h}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

   met $g(x) = xe^{-|x|}$ en $h(x) = e^{-|x|}$. Als $f(x) = (1+x)e^{-|x|}$, bewijs dan dat

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(1+\omega^2) - 2i\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

c) i. Formuleer en bewijs de recursieformule van de bètafunctie.

ii. Leg uit aan de hand van een voorbeeld wat het verschil is tussen volgende uitdrukkingen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \quad \text{en} \quad ⨍_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Deel B (enkel voor studenten wiskunde, op 5,5 punten)

1. a) Geef de definitie van een maat μ over een Σ-algebra $\mathcal{A}$.

   b) Toon aan.

   i. $1_{A\cap B} = 1_A 1_B$ met $A, B \in \mathcal{A}$.

   ii. Voor elke verzameling van A_n in $\mathcal{A}$ bestaat er een verzameling van disjuncte B_n waarvoor $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

   iii. μ is σ-subadditief of dus $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

2. a) Gegeven een homogeen lineair stelsel (met veranderlijke coëfficiënten) van 3 scalaire vergelijkingen. Wat kan je dan besluiten over de dimensie van de oplossingen-ruimte? Motiveer.(Je hoeft gebruikte eigenschappen niet aan te tonen)

   b) Bewijs het volgende. Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ en f een continue afbeelding $I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die lokaal gelijkmatig Lipschitz-continu is. Dan heeft het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

   een oplossing in I.

3. Gegeven een niet-lineair autonoom systeem

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -v(u+v) \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (2 - v^2) + u \end{cases}$$

   Bereken dan

   a) de evenwichten

   b) de Jacobiaanse matrix in de evenwichten

   c) de eigenwaarden van de Jacobiaanse matrix en gebruik deze om de aard van de evenwichten af te leiden.

   d) Schets de horizontale en verticale isoclinen in het fasevlak en duidt ook de evenwichten aan.

Oefeningen (voor de fysici op 8 punten, voor de wiskundigen op 7 punten)

1. Bereken de oppervlakte van het deel van $(x-a)^2+y^2=z$ dat ingesloten wordt door de cilinder $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ met $x\geq 0$ en $a>0$ willekeurig.

2. Bereken het volume van het gebied dat voldoet aan de ongelijkheden $3x^2+4y^2\leq 1$ en $x^3\leq z\leq x^2$.

3. Voor een willekeurige $n\in\mathbb{N}_{\geq 1}$, bereken $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$ waarbij $\mathbf{F}(x,y,z)=\left((n+1)yz, z^2, \frac{n^2}{(n+1)^2}xyz\right)$ en waarbij Γ de snijkromme is van de oppervlakken $y=x^n$ en $z=ln(xy)$ $(x,y>0)$ doorlopen van (1,1,0) tot aan de limiet in $(0,0,-\infty)$.

4. (enkel voor de fysici) Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y^3\sinh(x)\mathrm{d}x+\cosh(x)\mathrm{d}y=0.$$

De oplossingen mogen impliciet gegeven worden.

4. (enkel voor de wiskundigen) Gegeven de matrix $A=\begin{pmatrix}2&4&0&0\\0&2&0&0\\5&3&1&1\\4&7&1&1\end{pmatrix}$. Geef alle basisoplossingen van $x'(t)=Ax(t)$ waarbij $x(t)\in\mathbb{R}^4$.