Examenregeling Discrete Wiskunde II

Academiejaar 2017–2018

Het examen Discrete Wiskunde II bestaat uit twee gedeelten.

(1) Oefeningengedeelte (10/20): open boek examen; toegelaten zijn theorie- en oefeningencursus en bijhorende geschreven notities.

(2) Theoriegedeelte (10/20): gesloten boek examen over de hele cursus.

Voor het theoriegedeelte gelden echter volgende modaliteiten.

- Er komen geen vragen uit Paragraaf 9.2.
- Van Hoofdstuk 11 dienen enkel de eerste twee paragrafen van Sectie 11.2 gekend te zijn.
- In de cursus staan verscheidene kleine oefeningen/opgaven die in de les niet behandeld geweest zijn. Daarover zal niet ondervraagd worden.
- Tenminste 80% van de punten op het theoriegedeelte heeft betrekking op een reeks modelvragen die hieronder vermeld worden. (Die vragen hoeven niet noodzakelijk in de onderstaande vorm gesteld te worden).
- Stellingen (wiens bewijs gevraagd wordt) kunnen eventueel ook in een andere equivalente bewoording gesteld worden (ten opzichte van deze in de cursus), zoals b.v.b. wijziging van notaties. Ook kan het zijn dat niet de hele stelling maar een gedeelte ervan gevraagd wordt.

Modelvragen

- Bewijs dat elke eigenwaarde λ van een graaf Γ met maximale graad Δ voldoet aan $-\Delta \leq \lambda \leq \Delta$. Bewijs ook dat, indien Γ samenhangend is, dan Δ een eigenwaarde is van Γ als en slechts als Γ regulier is, in welk geval de multipliciteit gelijk is aan 1. Bewijs verder dat, indien Γ samenhangend is, en indien $\lambda = -\Delta$, dan ook Δ een eigenwaarde is, beide hebben multipliciteit 1, en Γ is regulier en bipartiet. Bewijs tenslotte dat Γ samenhangend en regulier is als en slechts als de matrix $\mathbf{J}$ bestaande uit allemaal 1'en behoort tot de adjacentiealgebra van Γ.

- Bewijs dat een graaf Γ bipartiet is als en slechts als de karakteristieke veelterm ofwel een even ofwel een oneven functie is (naargelang n even of oneven is). Onderstel nu dat de karakteristieke veelterm van de graaf Γ met minstens drie toppen gelijk is aan

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + c_n \ .$$

  Bestaat er een oneven getal ℓ met $c_\ell \neq 0$, zij dan het natuurlijke getal i minimaal met de eigenschap dat $c_{2i+1} \neq 0$. Er geldt dat c_{2i+1} even is, dat $-c_{2i+1}/2$ gelijk is aan het aantal cykels van lengte $2i+1$ in Γ, en dat Γ geen cykels van oneven lengte kleiner dan $2i+1$ bevat. Zijn alle c_ℓ gelijk aan nul, voor oneven ℓ, dan bevat Γ geen cykels van oneven lengte. Bewijs deze beweringen.

- Een samenhangende graaf Γ is euleriaans als en slechts als de graad van elke top even is. Bewijs dit.

- Zij Γ een graaf met $n \geq 3$ toppen. Veronderstel dat u en v niet-adjacente toppen van Γ zijn waarvoor $\deg(u)+\deg(v) \geq n$. Bewijs dan dat Γ hamiltoniaans is als en slechts als $\Gamma + uv$ hamiltoniaans is.

- Zij $\Gamma = (V, E)$ een willekeurige samenhangende graaf met ten minste twee toppen. Zij v een willekeurige top van Γ, en definieer een $(n-1) \times (n-1)$-matrix $\mathbf{M}_v$ waarvan de rijen en kolommen worden geïndexeerd door de toppen van $\Gamma - v$ als volgt. Op de diagonaalplaats (w, w) staat de graad van de top w; op de plaats (w, w'), met $w \neq w'$, staat -1 als w en w' adjacent zijn, en 0 als ze niet adjacent zijn. Bewijs dat het aantal opspannende bomen van Γ wordt gegeven door de determinant van $\mathbf{M}_v$.

- Bewijs dat het maximaal aantal top-disjuncte v-w-paden in een graaf Γ, met $v, w \in V(\Gamma)$ en v niet adjacent aan w, gelijk is aan het minimaal aantal toppen in een v-w-scheidende verzameling. Bewijs ook dat een graaf Γ met ten minste $k+1$ toppen k-samenhangend is als en slechts als elk paar verschillende niet-adjacente toppen kunnen verbonden worden door ten minste k top-disjuncte paden.

- Bewijs dat, indien een graaf Γ bipartiet is, dan het aantal bogen in een maximum koppeling in Γ gelijk is aan het aantal toppen in een minimum toppenbedekking. Gebruik dit om te bewijzen dat, indien Γ een bipartiete graaf is met bipartitieverzamelingen A en B, er dan een koppeling in Γ bestaat die alle toppen van A verzadigt als en slechts als $\Psi_{A,B}$ vruchtbaar is. Bewijs ook dat voor een bipartiete graaf Γ met bipartitieverzamelingen A en B, de volgende uitspraken equivalent zijn.

  - Γ bezit een perfecte koppeling.
  - $|A| = |B|$, en $\Psi_{A,B}$ of $\Psi_{B,A}$ zijn vruchtbaar.
  - $\Psi_{A,B}$ en $\Psi_{B,A}$ zijn beide vruchtbaar.

  Bewijs tenslotte dat elke reguliere graaf met ten minste 1 boog een perfecte koppeling heeft.

- Zij Γ een samenhangende graaf met maximale graad $\Delta = \Delta(\Gamma)$. Bewijs dan dat

  1. $\omega(\Gamma) \leq \chi(\Gamma) \leq 1 + \Delta$;
  2. $\chi(\Gamma) \leq \Delta$ als en slechts als Γ noch een complete graaf, noch een oneven cykel is.

  Verklaar de verschillende begrippen en symbolen in deze stelling.

- Definieer het begrip normaaldeler van een groep. Definieer een bewerking op de verzameling van de nevenklassen van een normaaldeler en toon aan dat de verzameling van de nevenklassen voor deze bewerking een groep vormt. Toon aan dat de kern van een permutatievoorstelling een normaaldeler van de groep is. Toon aan hoe je op basis van een gegeven permutatievoorstelling met behulp van de kern een getrouwe permutatievoorstelling vastlegt.

- Toon aan dat de banen van een permutatiegroep (G, X) de verzameling X partitioneren. Toon aan dat (G, B) een transitieve permutatievoorstelling is als B een baan is. Toon aan dat een graaf regulier is als er een automorfismegroep is die transitief werkt op de toppenverzameling. Toon aan dat een graaf zonder gesoleerde toppen bipartiet is als er een groep is die boogtransitief maar niet toptransitief op het graaf werkt.

- Wat verstaat men onder de stabilisator van een element $x \in X$ in een permutatievoorstelling (G, X)? Toon aan dat deze een deelgroep van G is. Bewijs de baan-stabilisatorformule. Geef het verband tussen de stabilisatoren van twee verschillende elementen in éénzelfde baan. Toon aan dat de nevenklassen van een stabilisator kunnen beschreven worden ten opzichte van de werking van de permutatievoorstelling (stelling 8.2.3).

- Geef en bewijs de baantelformule. De gevolgen van deze baantelformule zoals vermeld in gevolg 8.3.3 moeten eveneens gekend zijn.

- Definieer voor een graaf Γ en een permutatie φ van de toppen de afbeelding t_φ en de matrix M_φ. Toon aan dat M_φ orthogonaal is en dat $M_{\varphi\psi} = M_\psi M_\varphi$. Bewijs dat M_φ commuteert met de adjacentiematrix van de graaf als en slechts als φ een automorfisme van de graaf is. Maak hiervan gebruik om aan te tonen dat de lineaire afbeelding behorend bij een automorfisme van de graaf de eigenruimten van de adjacentiematrix fixeert.

- Toon aan dat als alle eigenwaarden van een graaf multipliciteit één hebben, dat de automorfismegroep van de graaf dan commutatief is. Toon aan dat als een k-reguliere graaf top- en boogtransitief is, en een eigenwaarde verschillend van k heeft met multipliciteit 1, dat de graaf dan bipartiet is en precies twee eigenwaarden met multipliciteit 1 heeft.

- Definieer de alternerende groep. Hoeveel elementen bevat deze? Toon aan. Bewijs dat een element van de symmetrische groep Sym_n tot de alternerende groep Alt_n behoort als en slechts dan als het kan geschreven worden als product van een even aantal transposities.

- Toon aan dat de automorfismegroep van het Petersengraaf isomorf is met Sym_5.

- Definieer de Cayleygraaf van een groep G en een deelverzameling $S \subseteq G$ waarvoor $S^{-1} = S$. Toon aan dat G door rechtse vermenigvuldiging scherp transitief op de Cayleygraaf werkt. Geef en bewijs een nodige en voldoende voorwaarde voor het samenhangend zijn van de Cayleygraaf. Geef en bewijs een nodige en voldoende voorwaarde opdat een automorfisme van G een automorfisme van de Cayleygraaf zou bepalen. Toon aan dat een graaf met een scherp transitieve automorfismegroep isomorf is met een Cayleygraaf.

- Definieer wat een q-aire (n, M, d)-code is. Leg het verband uit tussen minimumafstand enerzijds en foutdetectie en -verbetering anderzijds. Definieer gelijkwaardige codes. Geef het hoofdprobleem van de codeertheorie en bewijs dat $M_2(n, d) = M_2(n + 1, d + 1)$ voor oneven d.

- Definieer perfecte codes. Toon een bovengrens aan op het aantal codewoorden van een q-aire (n, M, d)-code die scherp is voor perfecte codes.

Geef de Fanocode, bewijs dat deze door drie eigenschappen wordt vastgelegd, en toon aan dat ze perfect is.

- Definieer lineaire codes en definieer het gewicht van een codewoord. Toon aan dat het minimum van de gewichten van een lineaire code gelijk is aan de minimumafstand. Toon aan dat een $[n, k]$-code steeds kan beschreven worden door een matrix van de vorm $[I_k \ S]$. Beschrijf de decodering van lineaire codes aan de hand van nevenklasseleiders.

Theorie

De eerste drie vragen kwamen uit bovenstaande lijst met modelvragen.

4. a) Geef de definitie van een euleriaans spoor, een euleriaans circuit en een euleriaanse graaf. Geef ook een nodige en voldoende voorwaarde op een samenhangende graaf opdat die een euleriaans spoor resp. circuit zou bevatten.
   b) Geef zonder bewijs de stelling van Brooks.
   c) Stel $\mathcal{C}$ een q-aire code, $q, |\mathcal{C}| > 2$, met lengte n en minimumafstand d. Hoeveel fouten kunnen er gedetecteerd worden? Hoeveel fouten kunnen er verbeterd worden?
   d) Geef het hoofdprobleem van de codeertheorie. Definieer de parameter $M_q(n, d)$. Geef, voor oneven d, het verband tussen $M_2(n, d)$ en $M_2(n + 1, d + 1)$.

Oefeningen

1. a) Geef het maximaal aantal bogen in een graaf op n toppen met p componenten. Bewijs de maximaliteit.
   b) Een graaf op n toppen, met meer dan $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bogen is samenhangend. Bewijs.
2. Bedenk een voorwaarde op de natuurlijke getallen p, q en r die equivalent is met

   de tripartiete complete graaf $K_{p,q,r}$ bezit een perfecte koppeling.

   Bewijs de equivalentie.
3. De viergroep van Klein K is een verzameling $\{e, a, b, c\}$ met een binaire, associatieve productoperatie waarvoor

$$\begin{cases} e \text{ is het eenheidselement} \\ a^2 = b^2 = c^2 = e \\ ab = c \end{cases}$$

   a) Geef een graaf $\Gamma = (V, E)$ met $|V| + |E|$ minimaal waarvoor de automorfismegroep $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ isomorf is met de viergroep van Klein. Bewijs de minimaliteit en de uniciteit van deze graaf.
   b) Geef een samenhangende graaf $\Gamma = (V, E)$ met $|V| + |E|$ minimaal waarvoor de automorfismegroep $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ isomorf is met de viergroep van Klein. Bewijs de minimaliteit en de uniciteit van deze graaf.
4. Bewijs. De minimumafstand van een perfecte q-aire code is oneven.