Examen Discrete Wiskunde (theorie), 30 januari 2018

Vraag 1. Wat is het verschil tussen een antireflexieve relatie en een niet-reflexieve relatie? Wat is het verschil tussen een antisymmetrische en een niet-symmetrische relatie? Wat is het verschil tussen een equivalentierelatie en een partiële orderelatie? Geef hierbij volledige definities voor elk van die relaties.

Vraag 2. Als $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ en $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ twee formele machtreeksen zijn in $\mathbb{Q}[[x]]$ of $\mathbb{R}[[x]]$, met $b_0 \neq 0$, toon dan aan dat er een unieke formele machtreeks $h(x)$ bestaat zodat $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Meer bepaald is $h(x) = \frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, waarbij de coëfficiënten c_k recursief gedefinieerd worden als $c_0 = a_0$ en $c_k = a_k - \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^{k} b_i c_{k-i}$ voor alle $k \geq 1$.

Vraag 3. Leg het algoritme van Euclides uit voor het bepalen van de grootste gemene deler van twee positieve gehele getallen. Verklaar eveneens waarom dit algoritme precies de grootste gemene deler oplevert.

Vraag 4.

(a) Geef de definitie van wanorde en van Stirling getal van de tweede soort. Geef 1 recursievergelijking (met beginvoorwaarden) die toelaat om het aantal wanordes te berekenen.

(b) Druk de herhalingscombinatie $\overline{\binom{n}{k}}$ uit als een gewone combinatie.

(c) Formuleer zonder bewijs de regel van Bayes.

(d) Geef de definitie van Bernouilli-verdeelde, binomiaal verdeelde en geometrisch verdeelde toevalsveranderlijke. Geef eveneens (zonder bewijs) de kansmassafunctie van elk.

(e) Geef zonder bewijs een nodige en voldoende voorwaarde opdat een element van $\mathbb{Z}/m$ met $m \in \mathbb{N}^*$ inverteerbaar zou zijn. Is de som van twee inverteerbare elementen van $\mathbb{Z}/m$ steeds inverteerbaar? Leg uit waarom wel of waarom niet.