Examen LAM II

2017–2018

Oefeningenexamen

- woensdag 13 juni, 14u
- S25, Emmy Noether

Het oefeningenexamen Lineaire Algebra en Meetkunde II is schriftelijk en neemt vier uur in beslag. Toegelaten materiaal omvat, naast schrijfgerei, de theorie-cursus en opgeloste oefeningen. Het gebruik van elektronisch materiaal is niet toegelaten. Examenvragen zijn gebaseerd op de kennis vergaard in de theorielessen (voor de te kennen leerstof, zie hieronder) en de daarop gemaakte oefeningen. Men mag zich eraan verwachten dat de gemiddelde moeilijkheidsgraad van het examen hoger ligt dan die tijdens de oefeningenlessen; desalniettemin zou een student die alle oefeningen uit de oefeningenlessen beheerst, moeten kunnen slagen.

Theorie-examen

- donderdag 14 en vrijdag 15 juni, op afspraak
- Het uurrooster zal eind mei ter beschikking gesteld worden via Minerva. Voordien kan een voorkeur doorgegeven worden.
- S25, Emmy Noether

Het theorie-examen Lineaire Algebra en Meetkunde II is mondeling, met schriftelijke voorbereiding. Zowel de voorbereiding als het examen zelf nemen ongeveer een half uur in beslag. De student maakt gebruik van het bord om zijn of haar antwoord te verduidelijken. Het examen zal twee hoofdvragen hebben, die uit verschillende hoofdstukken komen. De te kennen leerstof omvat de hele cursus met uitzondering van Paragraaf 1.8 en Hoofdstuk 4.

De hoofdvragen komen uit de onderstaande lijst, maar tijdens het examen zal gepeild worden naar inzicht in de volledige inhoud van de cursus (met uitzondering van de hierboven genoemde stukken). De hoofdvragen vormen hiervoor het vertrekpunt. De hieronder opgelijste theorievragen vormen dus niet de oplijsting van te kennen leerstof. De hoofdvragen worden ook niet noodzakelijk in de onderstaande vorm gesteld. U kan bijvoorbeeld ook het bewijs krijgen dat het antwoord op de vraag vormt, en gevraagd worden enkele delen uit dat bewijs te verduidelijken of in verband te brengen met andere delen uit de cursus.

Het spreekt voor zich dat de student tijdens het theorie-examen enkel schrijfgerei bij zich heeft. Laptops, tablets, smarthphones en gsm's, cursusnota's, eigen nota's, ... zijn niet toegelaten.

Hoofdvragen

- Definieer parallellisme voor vlakken in een affiene ruimte. Toon aan dat parallellisme een equivalentierelatie in de familie van vlakken in een affiene ruimte is.

- Beschouw een vlak V van een affiene ruimte, en een punt x. Toon aan dat er een uniek vlak V' bestaat met $x \in V' \parallel V$.
- Beschouw een affiene deelruimte D van een affiene ruimte (affien vlak) en een punt $x \notin D$. Bewijs de volgende stelling. Als D' de unie is van alle rechten door x die ofwel een punt van D bevatten ofwel evenwijdig zijn aan een rechte van D, dan is D' een affiene deelruimte. Bovendien is $D' = \langle S \cup \{x\} \rangle$ als $D = \langle S \rangle$.
- Voer het begrip dimensie in voor een affiene deelruimte en toon aan waarom dit begrip goed gedefinieerd is.
- Definieer de groepen $\mathrm{Tra}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Dil}(\mathcal{A})$ en $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ voor een affiene ruimte $\mathcal{A}$. Bewijs dat $\mathrm{Tra}(\mathcal{A}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Tra}(\mathcal{A}) \trianglelefteq \mathrm{Dil}(\mathcal{A})$ en $\mathrm{Dil}(\mathcal{A}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.
- Toon aan dat $\mathrm{Tra}(\mathcal{A})$ commutatief is als $\mathrm{Tra}(\mathcal{A})$ minstens twee verschuivingen met niet parallelle fixrechten bevat.
- Geef en bewijs de Affiene Stelling van Desargues.
- Geef en bewijs de Omgekeerde Affiene Stelling van Desargues.
- Toon aan dat equipollentie in een affiene ruimte van dimensie ten minste 3 een equivalentierelatie is.
- Definieer de afbeelding $\tau_{\vec{v}}$ voor een vector $\vec{v}$ van een affiene ruimte van dimensie ten minste 3. Toon aan dat $\tau_{\vec{v}}$ een verschuiving bepaalt.
- Beschouw een vaste rechte $\mathbb{K}$ in een pappiaanse affiene ruimte van dimensie ten minste 3. Definieer een optelling en een vermenigvuldiging op $\mathbb{K}$ en toon aan dat $\mathbb{K}, +, .$ een veld is.
- Geef en bewijs de Hoofdstelling van de Affiene Meetkunde.
- Geef en bewijs de Stelling van Thales.
- Bewijs dat elke affiniteit de deelverhouding behoudt. Toon ook aan dat indien elke rechte van een affiene ruimte ten minste drie punten heeft, dan elke permutatie van de punten die collineariteit en deelverhouding van collineaire punten bewaart een affiniteit is.
- Bespreek het verband tussen kwadratische en bilineaire vormen.
- Bewijs: als $\mathrm{kar}(\mathbb{K}) \neq 2$, dan is een bilineaire vorm over een $\mathbb{K}$-vectorruimte te schrijven als de som van een symmetrische en een alternerende bilineaire vorm, en deze som is uniek.
- Toon aan dat een bilineaire vorm reflexief is als en slechts als hij alternerend of symmetrisch is. Toon ook aan dat elke reflexieve σ-sesquilineaire vorm, met $\sigma \neq \mathbb{1}$, proportioneel is aan een hermitische vorm.
- Bewijs: als $f : V \times V \to \mathbb{K}$ alternerend is, V eindigdimensionaal is en $\mathrm{rad}(f)$ triviaal is, dan is $\dim(V)$ even.
- Bewijs: als $f : V \times V \to \mathbb{K}$ een reflexieve σ-sesquilineaire vorm met triviaal radicaal is en V eindigdimensionaal is, dan is $\dim V = \dim D + \dim D^{\perp}$ voor elke deelruimte D van V.
- Toon aan dat isometrische sesquilineaire vormen isomorfe isometriegroepen hebben.
- Geef en bewijs een eenvoudige matrixvoorstelling voor alternerende bilineaire vormen en σ-hermitische vormen over willekeurige velden en symmetrische bilineaire vormen over velden met karakteristiek verschillend van 2. Eenvoudig: het aantal niet-nulelementen is hoogstens de dimensie van de vectorruimte, en zo veel mogelijk niet-nul elementen zijn gelijk aan 1.

- Geef en bewijs een eenvoudige matrixvoorstelling voor symmetrische bilineaire vormen over velden met karakteristiek gelijk aan 2. Eenvoudig: het aantal niet-nulelementen is hoogstens de dimensie van de vectorruimte, en zo veel mogelijk niet-nul elementen zijn gelijk aan 1.
- Geef en bewijs de Traagheidswet van Sylvester voor symmetrische bilineaire vormen over een reële, eindigdimensionale vectorruimte.
- Geef en bewijs de Traagheidswet van Sylvester voor σ-hermitische vormen over een complexe, eindigdimensionale vectorruimte, met σ de complexe toevoeging.
- Toon de volgende stelling aan. Beschouw een niet-ontaarde bilineaire vorm $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is, met geassocieerde kwadratische kegel $\mathcal{K}$. Het poolvectorvlak van een vectorrechte snijdt elk vectorvlak door deze vectorrechte dat twee vectorrechten van $\mathcal{K}$ bevat, in een unieke vectorrechte.

  Veronderstel dat ℓ een affiene rechte is, $v, v', u \in \ell$, $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle \neq \langle v' \rangle \neq \langle u \rangle$ en $v, v' \in \mathcal{K}$. Als $u' \in \ell$ in het poolvectorvlak van $\langle u \rangle$ ligt, dan is $(\overrightarrow{uv'} : \overrightarrow{uv}) + (\overrightarrow{u'v'} : \overrightarrow{u'v}) = 0$. Als ℓ evenwijdig is aan het poolvectorvlak van $\langle u \rangle$, dan is $\overrightarrow{vu} = \overrightarrow{uv'}$.
- Toon aan dat door vijf verschillende vectorrechten waarvan geen vier in eenzelfde vectorvlak gelegen zijn, en die als verzameling invariant zijn onder complexe toevoeging, juist één kwadratische kegel gaat. Deze is niet-ontaard als en slechts als geen drie van die vijf vectorrechten in eenzelfde vlak gelegen zijn.
- Definieer een bundel van kwadratische kegels. Beschouw dan vier vectorrechten in $\mathbb{C}^3$, als verzameling gesloten onder complexe toevoeging, en geen drie in eenzelfde vectorvlak. Toon aan dat de verzameling van kwadratische kegels die deze vier vectorrechten bevatten een bundel is. Geef de ontaarde exemplaren van deze bundel.
- Geef en bewijs de Stelling van Pascal.
- Bespreek de affiene classificatie van de kegelsneden.
- Geef de definitie van een raaklijn en van een asymptoot aan de kegelsnede. Bepaal de kwadratische vergelijking der raaklijnen door een punt buiten een niet-ontaarde kegelsnede. Bepaal de kwadratische vergelijking van de asymptoten.
- Definieer assen van een niet-ontaarde kegelsnede. Toon aan dat elke niet-ontaarde ellips die geen cirkel is en elke niet-ontaarde hyperbool een uniek paar reële assen heeft. Bespreek hoe je de assen makkelijk kan bepalen.
- Definieer de kwadratische halve aslengte voor een as van een niet-ontaarde ellips of hyperbool. Toon aan dat bij elke as van een niet-ontaarde ellips of hyperbool $\mathcal{K}$ een unieke kwadratische halve aslengte hoort, een geef deze.

Lineaire algebra en meetkunde II Oefeningen op 10/20 punten

1. Beschouw H en H' hypervlakken (affiene deelruimten met dimensie gelijk aan vier) van een affiene ruimte $\mathcal{A} = AG(5, q)$ waarbij $H \cap H'$ niet leeg is.
   a) Beschouw een rechte L in H die disjunct is met H'. Toon aan dat L zwak parallel is met $H \cap H'$ en dat de dimensie van $H \cap H'$ gelijk is aan drie.
   b) Noem $\mathcal{H}$ de verzameling hypervlakken door $H \cap H'$. Hoeveel elementen heeft $\mathcal{H}$? Motiveer.
   c) Bestaat er een dilatatie van $\mathcal{A}$ die H afbeeldt op H'? Zo ja, beschrijf deze dilatatie. Zo nee, motiveer.
2. Beschouw V een $\mathbb{K}$-vectorruimte met dimensie $n < \infty$ en $\text{kar}(\mathbb{K}) \neq 2$. Beschouw ook een symmetrische bilineaire vorm $b : V \times V \to \mathbb{K}$.
   a) Toon aan dat voor elke bilineaire vorm b', er een lineaire vorm f bestaat zodat $b'(v, w) = b(v, f(w))$ voor elke $v, w \in V$.
   b) Definieer nu een (symmetrische) bilineaire vorm $b''(v, w) = b(f(v), f(w))$ voor elke $v, w \in V$ voor een lineaire vorm f. Wanneer is b'' ontaard? Druk uit in functie van f.
3. De volgende vraag gaat over het reële euclidische vlak.
   a) Bestaat er een bundel met enkel parabolen en minstens één niet-ontaard exemplaar?
   b) Geef de algemene vergelijking van een niet-ontaarde parabool door $(0, 0, 1)$ waarvan de as evenwijdig is aan de y-as. Maak een schets.
   c) Bewijs. Een rechte L is een raaklijn aan een niet-ontaarde parabool P als en slechts als L loodrecht staat op de rechte door het brandpunt van P en het snijpunt van L met de topraaklijn van P. (Hint: kies je coördinaten wijselijk om de berekening te vereenvoudigen.)