Examen Logica

21 juni 2018

Het examen duurt 4 uur en is open boek (gsm's, laptops, tablets, etc. zijn niet toegestaan!). Gelieve vragen 1-4 en 5-6 op ***aparte*** *bladen te beantwoorden. Veel succes!*

Vraag 1 (3 punten): Zij A_i en B_i, $i = 1, 2$, niet-lege verzamelingen.

(*i*) Zij $|A_i| \leq |B_i|$ en $2 \leq |B_i|$ voor $i = 1, 2$. Toon aan dat

$$|A_1| + |A_2| \leq |B_1| \cdot |B_2|.$$

(*ii*) Zij $|A_i| < |B_i|$ voor $i = 1, 2$. Toon aan dat

$$|A_1| + |A_2| < |B_1| \cdot |B_2|.$$

Vraag 2 (4 punten): Zij R een commutatieve ring en $I \subseteq R$ een ideaal. Definieer

$$\mathrm{Rad}(I) := \{r \in R \mid r^n \in I \text{ voor zekere } n \in \mathbb{N}\}$$

en

$$\mathrm{Spec}(I) := \bigcap \{P \subseteq R \mid P \supseteq I \text{ en } P \text{ is een priemideaal}\}.$$

Het doel van deze oefening is aan te tonen dat $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Spec}(I)$. We gaan als volgt te werk:

(*i*) Toon aan dat $\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathrm{Spec}(I)$.

(*ii*) Zij $S \subseteq R$ een verzameling zodat $xy \in S$ voor alle $x, y \in S$ en $S \cap I = \emptyset$. Toon met behulp van het Lemma van Zorn aan dat er een priemideaal $P \subseteq R$ bestaat zodat $P \supseteq I$ en $P \cap S = \emptyset$.

(*iii*) Zij $r \in R \setminus \mathrm{Rad}(I)$. Toon met behulp van (*ii*) aan dat er een priemideaal $P \subseteq R$ bestaat zodat $P \supseteq I$ en $r \notin P$. Leid hieruit af dat $\mathrm{Rad}(I) \supseteq \mathrm{Spec}(I)$.

Vraag 3 (3,5 punten): Zij $(a_i)_{i=1}^k$ en $(b_i)_{i=1}^l$ twee eindige rijen van natuurlijke getallen. Noem $(a_i)_{i=1}^k < (b_i)_{i=1}^l$ als $k < l$ en $a_i = b_i$ voor $1 \leq i \leq k$ of als er een $i_0 \leq \min(k, \ell)$ bestaat zodat $a_{i_0} < b_{i_0}$ en $a_i = b_i$ voor $1 \leq i < i_0$.

(*i*) Toon aan dat de verzameling van eindige rijen van natuurlijke getallen met deze ordening geen goede ordening vormt.

(ii) Toon aan dat de verzameling van strikt dalende eindige rijen van natuurlijke getallen met deze ordening wel een goede ordening vormt.

Vraag 4 (4,5 punten): Zij $L = \{P\}$ de taal die één unitair relatiesymbool bevat. Zij T de theorie die voor elke $n \in \mathbb{N}$ volgende zinnen bevat

$$\exists x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{i,j=1; i \neq j}^{n} \neg(x_i = x_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} P(x_i) \right),$$

$$\exists x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{i,j=1; i \neq j}^{n} \neg(x_i = x_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg P(x_i) \right).$$

(i) Geef een beschrijving van de modellen van T.

(ii) Gebruik Lemma 2.7.3 om aan te tonen dat T kwantoreliminatie heeft.

(iii) Toon aan dat T ω-categorisch is.

(iv) Toon aan dat T niet 2^ω-categorisch is.

Vraag 5 (3 punten): Zij L een eerste orde taal. De verzameling P van positieve L-formules is de kleinste verzameling van L-formules die aan volgende voorwaarden voldoet:

(a) P bevat alle atomaire formules.

(b) Zij $\varphi, \psi \in P$. Dan bevat P ook de formules $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\forall x \varphi$ en $\exists x \varphi$.

Zij M en N L-structuren. Een afbeelding $h : M \to N$ wordt een homomorfisme genoemd als

(a) $h(c^M) = c^N$ voor alle constanten c in L.

(b) $h(f^M(m_1, \ldots, m_n)) = f^N(h(m_1), \ldots, h(m_n))$ voor alle functiesymbolen f in L en alle $m_1, \ldots, m_n \in M$.

(c) $(m_1, \ldots, m_n) \in R^M \Longrightarrow (h(m_1), \ldots, h(m_n)) \in R^N$ voor alle relatiesymbolen R in L en alle $m_1, \ldots, m_n \in M$.

Zij $h : M \to N$ een surjectief homomorfisme. Zij φ een positieve L-formule in de vrije variabelen $x_1, \ldots, x_n$ en zij $(m_1, \ldots, m_n) \in M$. Toon aan dat

$$M \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \Longrightarrow N \models \varphi(h(m_1), \ldots, h(m_n)).$$

Hint: Inductie op de complexiteit van formules. Formuleer en bewijs eerst een hulpbewering over de termen. Bewijs deze bewering met inductie op de complexiteit van termen.

Vraag 6 (2 punten): Geef gedecoreerde bewijsbomen voor de volgende twee uitspraken.

(i) $\neg\varphi \wedge (\psi \to \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi$.

(ii) $\neg R(a) \to S(a, y) \vdash \exists x(R(x) \vee S(x, y))$.