Examen Statistische Fysica I: 22 januari 2018

THEORIE (30 punten)

(10 punten voor onderstaande twee theorievragen, 20 punten voor het mondeling examen)

T1(3pt): Beschouw een systeem van N atomen met massa M die gedwongen worden in een volume V te bewegen. Het systeem wordt op een temperatuur T gehouden door contact met een warmtebad. Bewijs het verband tussen de soortelijke warmte C_V van het systeem, de canonische partitiefunctie en de grootheid ΔE. Bepaal en bereken de verhouding $\frac{\Delta E}{E}$ als een functie van het aantal atomen N in het systeem?

T2(7pt): Om de toestandsvergelijking van een niet-relativistisch ideaal Bose-Einstein gas voor een systeem met spin S deeltjes af te leiden, wordt gestart van een redenering van het type ($z \equiv e^{\beta\mu}$)

$$\begin{aligned}
\Phi(T,V,\mu) &= -kT \ln \mathcal{Z}(T,V,\mu) = E - TS - \mu N \\
&= -kT \sum_p \ln \mathcal{Z}_p^{BE} \\
&= +kT \sum_p \ln \left(1 - z e^{\frac{-\beta p^2}{2m}}\right) \\
&= +kT(2S+1)\frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - z e^{\frac{-\beta p^2}{2m}}\right) \ ,
\end{aligned} \tag{1}$$

- Verantwoord en becommentariëer de verschillende stappen die in de bovenstaande afleiding van vergelijking (1) werden doorgevoerd.
- Leid op basis van het bovenstaande de volgende formule af voor de gemiddelde druk P in een Bose-Einstein gas

  $$\frac{P}{kT} = \frac{(2S+1)}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \qquad \left(\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k T}}\right) .$$

  Bepaal daarbij de exacte mathematische uitdrukking voor $g_{5/2}(z)$.
- Leid op basis van het bovenstaande een algemene formule af voor de gemiddelde dichtheid $\frac{N}{V}$ in een Bose-Einstein gas.
- Leg op basis van de uitdrukkingen voor P en $\frac{N}{V}$ die je hierboven bekomen hebt, het verschijnsel *"Bose-Einstein condensatie"* uit (*maximum 15 lijnen*).

OEFENINGEN (20 punten)

- BELANGRIJK: Je kunt pas aan de oefeningen beginnen wanneer je je antwoorden op het theorie-examen hebt afgegeven.
- Bij het oplossen van het oefeningengedeelte mogen enkel gebruikt worden:
  1. de cursusnota's
  2. (eventueel) de transparanten die de lessen begeleiden
  3. (eventueel) Appendix A (Physical Constants and Mathematical Relations) uit het boek Harvey Gould and Jan Tobochnik "Statistical and Thermal Physics"

Oefening 1 (12 punten): Deeltjes met een magnetisch moment die bewegen op een oppervlak

Beschouw een gas van N spin-1 deeltjes met massa $m \neq 0$ die bewegen **op een oppervlak** A en in contact staan met een warmtebad op temperatuur T. Elk van de deeltjes $i = 1, 2, \ldots, N$ kan beschreven worden door een hamiltoniaan van het type

$$H^{(1)}(i) = \frac{p_i^2}{2m} - \mu_B s_z(i)\mathcal{B} \ ,$$

waarbij $\mu_B(> 0) = \left|\frac{e\hbar}{2m}\right|$, $s_z(i) \in \{-1, 0, +1\}$ en $\mathcal{B}$ de grootte van een extern magnetisch veld dat volgens de positieve z-as wordt aangelegd. De totale hamiltoniaan $H^{(N)}$ van het systeem van N deeltjes wordt gegeven door

$$H^{(N)}(1, 2, \ldots, N) = \sum_{i=1}^{i=N} H^{(1)}(i) \ .$$

We beschouwen condities waarbij de thermische golflengte van de deeltjes véél kleiner is dan de gemiddelde separatie tussen de deeltjes zodat het systeem aan de voorwaarden van een "klassiek gas" voldoet.

O1a(4pt): Bereken de vrije energie $F(T, A, N, \mathcal{B})$ van het totaal systeem.

O1b(3pt): Bereken de gemiddelde energie $\overline{E}(T, A, N, \mathcal{B})$ van het totaal systeem en toon daarbij aan dat het bestaat uit een som van een "kinetisch" en een "magnetisch" gedeelte. Toon aan dat de "kinetische" en "magnetische" gedeelten van de limieten $\lim_{T\to 0} \overline{E}$ en $\lim_{T\to\infty} \overline{E}$ voldoen aan wat je op basis van fysisch inzicht zou verwachten.

O1c(1pt): Bereken de druk in het systeem. Toon aan dat magnetische vrijheidsgraden niet bijdragen tot de "druk" in het systeem. Is dit een verwacht resulaat? Verklaar je antwoord.

O1d(2pt): Bereken de fugaciteit z van het systeem. Toon aan dat je resultaat compatibel is met het feit dat het systeem zich in een klassiek regime bevindt.

O1e(2pt): Bereken het gemiddeld aantal bosonen $\left(\overline{N}_-, \overline{N}_0, \overline{N}_+\right)$ in elk van de drie spintoestanden $s_z(i) \in \{-1, 0, +1\}$. Bereken het totaal magnetisch moment $\mathcal{M}$ van het systeem als functie van de sterkte van het magnetisch veld $\mathcal{B}$ en de temperatuur T.

Oefening 2 (8 punten): Stoner ferromagnetisme

Conductie-elektronen in metalen kunnen behandeld worden als een kwantummechanisch gas van spin-$\frac{1}{2}$ fermionen met een dichtheid $\rho = \frac{N}{V}$. Noem N_+ (N_-) het aantal elektronen met spin up (spin down). In de afwezigheid van een extern magnetisch veld kan men in laagste orde de spin-up en spin-down conductie-elektronen als ontaard beschouwen: $N_+ = N_- = \frac{N}{2}$ (de "symmetrische situatie"). De Coulomb afstoting tussen de elektronen zorgt echter voor een heel kleine tendens om toestanden te creëren met parallelle elektron spins. Een eenvoudig maar efficiënt model om dit effect benaderend in rekening te brengen bestaat uit het introduceren van een interactie-energie van de vorm

$$U = \alpha \frac{N_+ N_-}{V} \ ,$$

met α een meetbare sterkteparameter en V het volume. We beschouwen niet-relativistiche conductie-elektronen met een kinetische energie gegeven door $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, met m de elektronmassa.

O2a: De grondtoestand van de conductie-elektronen bevat twee ontaarde Fermi gassen (spin-up elektron gas en spin-down elektron gas). Vind een verband tussen de corresponderende Fermi golfvectoren (k_{F+}, k_{F-}) en de dichtheden $\left(\rho_+ = \frac{N_+}{V}, \rho_- = \frac{N_-}{V}\right)$.

O2b: Bereken voor de grondtoestand de bijdrage tot de kinetische energie E_{kin} in termen van de dichtheden $\left(\rho_+ = \frac{N_+}{V}, \rho_- = \frac{N_-}{V}\right)$.

O2c: Veronderstel dat er slechts kleine afwijkingen zijn van de symmetrische situatie $N_+ = N_-$ door te stellen dat $\rho_\pm = \frac{\rho}{2} \pm \delta$, met δ een kleine parameter. Expandeer E_{kin} in machten van δ zodat je een nauwkeurigheid bereikt van minstens $\theta\left(\delta^3\right)$.

O2d: Vind een uitdrukking voor de kritische waarde α_c van de grootheid α zodat voor $\alpha > \alpha_c$ het elektrongas spontaan een magnetisatie $\mathcal{M}$ ontwikkelt door het ontstaan van een asymmetrische situatie met $N_+ \neq N_-$. Dit fenomeen is gekend als de "*Stoner instabiliteit*". Toon aan dat $\mathcal{M}$ het geschetste gedrag heeft (zie figuur).