Oefeningenexamen Algebra I — 17 januari 2018

Veel succes!

Opgave 1. (a) Zij $G \leq \mathbf{S}_n$ met $|G| > 2$ en $G \nleq \mathbf{A}_n$. Toon aan dat G niet enkelvoudig is.

(b) Bewijs dat een groep van orde $2n$, met $n > 1$ oneven, niet enkelvoudig is. [Hint: beschouw de actie van G op zichzelf door rechtse vermenigvuldiging.]

Opgave 2. Zij G een eindige groep en p een priemgetal dat de orde van G deelt.

(a) Zij P een Sylow p-deelgroep en Q een willekeurige p-deelgroep van G. Toon aan dat $Q \cap N_G(P) = P \cap Q$.

(b) Stel dat $n_p(G) \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Toon aan dat er Sylow p-deelgroepen P en Q van G bestaan waarvoor $[Q : P \cap Q] = p$. [Hint: gebruik de techniek uit het bewijs van de stellingen van Sylow.]

commutatief

Opgave 3. Zij R een ring en $s \in R$. Zij $J = \{r \in R \mid s^n r = 0 \text{ voor een } n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Toon aan dat $s + J$ geen nuldeler is in R/J.

(b) Zij $I \trianglelefteq R$ zodat $s + I$ geen nuldeler is in R/I. Bewijs dat $I \supseteq J$.

(c) Stel

$$T = R[X]/(1 - sX).$$

Zij nu $\psi : R \to T$ de samenstelling van de natuurlijke homomorfismen

$$R \longrightarrow R[X] \longrightarrow R[X]/(1 - sX) = T,$$

i.e. $\psi(r) = r + (1 - sX)$. Toon aan dat $J = (1 - sX) \cap R = \ker(\psi)$ en dus $\operatorname{im}(\psi) \cong R/J$.

(d) Zij $Q \trianglelefteq T$ een priemideaal. Toon aan dat $\psi^{-1}(Q)$ een priemideaal is van R en $s \notin \psi^{-1}(Q)$.

(e) Toon aan dat $T = \{rX^n + (1 - sX) \mid r \in R, n \in \mathbb{N}\}$.

(f) Zij nu $P \trianglelefteq R$ een priemideaal met $s \notin P$ en definieer

$$\psi(P)T = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i t_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in \psi(P), t_i \in T \right\}.$$

Duidelijkerwijze is $\psi(P)T \trianglelefteq T$ (dit hoef je niet meer aan te tonen). Toon aan dat $\psi(P)T = \{rX^n + (1 - sX) \mid r \in P, n \in \mathbb{N}\}$.

(g) Bewijs dat $\psi(P)T$ een priemideaal is van T.

Opgave 4. Zij R een ring en M een R-moduul. Toon aan dat M projectief is als en slechts als er een verzameling $\{m_i \mid i \in I\}$ van elementen $m_i \in M$ en een verzameling $\{\Phi_i \mid i \in I\}$ van R-moduulmorfismen $\Phi_i : M \to R$ bestaan zodat:

1. voor elke $m \in M$ geldt $\Phi_i(m) = 0$ voor bijna alle $i \in I$ (dit wil zeggen, voor alle op een eindig aantal na),
2. voor alle $m \in M$ geldt

$$\sum_{i \in I} \Phi_i(m) m_i = m.$$