Inleiding tot de theoretische fysica

Theorie-examen

Academiejaar 2017-18 $\qquad$ 1^e zit

Opgave 1

(Zwaartepunt van een systeem met meerdere deeltjes)

(a) Definieer het zwaartepunt van een systeem van N deeltjes met massa m_i. Toon aan dat het zwaartepunt beweegt als een deeltje met de totale massa van het systeem onder invloed van de totale externe kracht, mits de interne krachten voldoen aan de (zwakke vorm van) de 3e wet van Newton. Definieer de totale impuls van het systeem en toon aan dat deze behouden is als de externe kracht op het systeem verdwijnt.
(b) Definieer het totaal draaimoment en extern krachtmoment (rond de oorsprong van een Cartesisch coördinaatsysteem). Toon aan dat in geval van centrale interne krachten (sterke vorm van 3e wet van Newton), de tijdsevolutie van het totaal draaimoment bepaald wordt door het extern krachtmoment, en dat het totaal draaimoment een behouden grootheid is als het extern krachtmoment op het systeem verdwijnt.
(c) Toon aan dat het totaal draaimoment (rond de oorsprong) de som is van het draaimoment van het zwaartepunt plus het draaimoment van de beweging van de deeltjes t.o.v. het zwaartepunt.
(d) Toon aan dat de totale kinetische energie gelijk is aan de som van de kinetische energie van het zwaartepunt plus de kinetische energie van de beweging van de deeltjes rond het zwaartepunt.

Opgave 2

(a) Leid de Euler-Lagrange vergelijkingen af voor het volgend variationeel probleem: voor welke functies $(y_1(x), .., y_n(x))$ die door twee gegeven configuraties $(y_1(x_1), .., y_n(x_1))$ en $(y_1(x_2), .., y_n(x_2))$ gaan is de integraal

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y_1(x), .., y_n(x), \dot{y}_1(x), .., \dot{y}_n(x), x)$$

extremaal (met $\dot{y}_k(x)$ de afgeleide naar x van de functie $y_k(x)$). Hierbij is $f(y_1, .., y_n, \dot{y}_1, .., \dot{y}_n, x)$ een gladde functie van $2n+1$ reële argumenten.

(b) Pas dit toe, door invoeren van de actie-integraal als de tijdsintegraal van de Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ tussen twee tijdstippen. Toon aan dat de eis dat de actie-integraal extremaal is, resulteert in de Lagrange bewegingsvergelijkingen.

Opgave 3

Toon aan dat bij een algemene beweging van een deeltje onder invloed van een conservatieve centrale kracht de perksnelheid constant is, m.a.w. het oppervlak dat de positievector van het deeltje in zijn vlakke baan rond het krachtcentrum beschrijft is constant per tijdseenheid.

Opgave 4

(a) Leid de canonische vergelijkingen van Hamilton af voor een systeem met Lagrangiaan $L(q_k, \dot{q}_k, t)$.
(b) Geef een expliciete constructie van de Hamiltoniaan in matrixnotatie, voor het generieke geval van een systeem met conservatieve krachten en een kinetische energie die een homogene kwadratische vorm is in de veralgemeende snelheden.

Inleiding tot de theoretische fysica

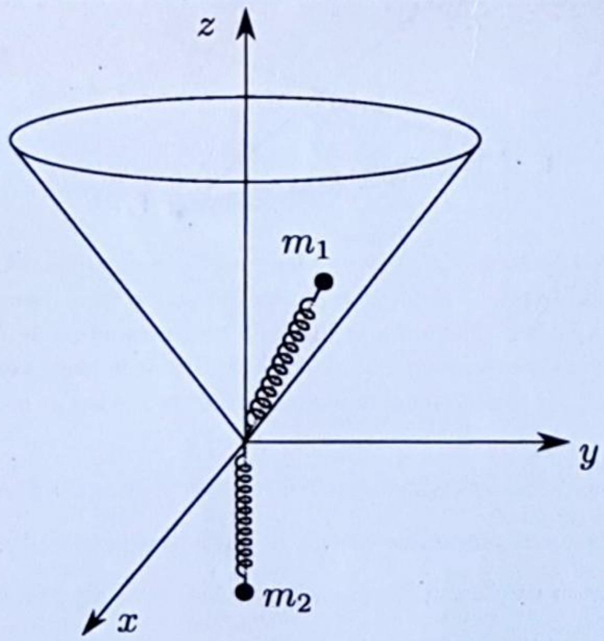
Oefeningenexamen 1^e zit van het academiejaar 2017-2018

28 juni 2018

Enkele afspraken:

- Begin elke opgave op een nieuw antwoordenblad. Schrijf op elk blad je naam en studentennummer. Ook al los je een vraag niet op, dien dan toch een blad in (met enkel je naam en studentennummer).
- Schrijf duidelijk!
- Werk alles grondig uit. Stukken overschrijven uit het boek of de cursus levert echter geen punten op. Als je iets gebruikt uit het boek of de cursus, mag je de vergelijking gewoon overnemen. Vermeld echter het nummer van de vergelijking!
- Er zijn 2 opgaven. In totaal kan je 10 punten verdienen met het oefeningenexamen.

Opgave 1



Neem twee massa's m_1 en m_2 verbonden door een touw met lengte ℓ_0. Massa 1 is gebonden om wrijvingsloos te bewegen op een kegeloppervlak bepaald door $z = \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$. Onderaan de kegel bevindt zich een kleine opening, waardoor het touwtje dat de massa's verbindt loopt. Tussen deze opening en massa 1 is een veer gespannen met rustlengte 0 en veerconstante k, en tussen deze opening en massa 2 is een veer gespannen met rustlengte ℓ_0 en veerconstante k. Onder het vlak hangt massa 2 die enkel verticaal kan bewegen. Het touw blijft strak gedurende de beweging en beide deeltjes zijn onderhevig aan de zwaartekracht. Zie bijhorende figuur.

(a) Zoek geschikte veralgemeende coördinaten om dit systeem te beschrijven. Laat je inspireren door cilindercoördinaten.

(b) Stel de kinetische en de potentiële energie op in deze coördinaten, en stel de Lagrangiaan en bijhorende Lagrangevergelijkingen op.

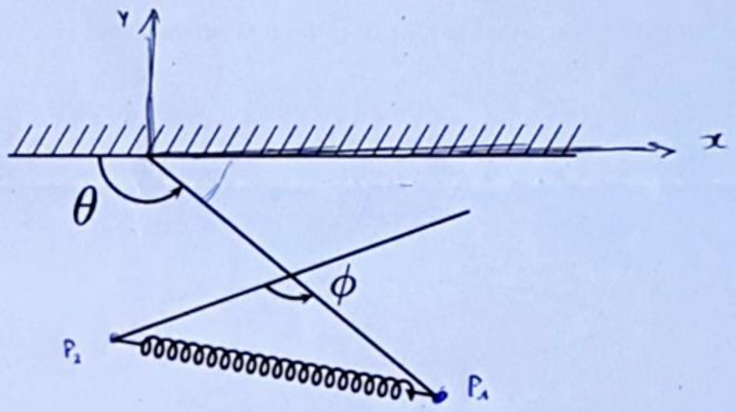
(c) Toon aan dat er naast de energie nog een eerste integraal van de beweging is. Wat is de fysische interpretatie van deze constante van de beweging (noem deze constante ℓ)? Gebruik deze om het probleem te herleiden tot een ééndimensionaal probleem met een effectieve potentiaal.

(d) Schets deze effectieve potentiaal. Bepaal grafisch of er een oplossing mogelijk is waar de beweging van deeltje 1 cirkelvormig op constante hoogte is.

(e) Verwaarloos nu de zwaartekracht (zet $g = 0$) en bepaal analytisch de straal r_0 van deze beweging. Is deze beweging stabiel?

(f) Bepaal de frequentie waarmee het deeltje trilt wanneer er een kleine uitwijking is van deze cirkelvormige beweging.

Opgave 2



Twee uniforme identieke staven met massa m en lengte $2l$ zijn aan elkaar bevestigd via een glad scharnier in hun massamiddelpunt. Een uiteinde van de eerste staaf is met een glad scharnier aan het vast plafond bevestigd. Het andere uiteinde van deze staaf is via een veer met een uiteinde van de andere staaf verbonden (zie tekening). De veer heeft een veerconstante k en een rustlengte l. Gebruik als veralgemeende coördinaten de hoeken θ en ϕ als gegeven op de tekening.

(a) Bepaald het traagheidsmoment van de staven bij een draaiing door hun massamiddelpunt.

(b) Bepaal de kinetische en de potentiële energie in termen van de veralgemeende coördinaten.

(c) Stel de lagrangiaan op van het systeem en bepaal de bewegingsvergelijkingen.

(d) Bepaal alle stabiele evenwichtspunten.

(e) Stel de kwadratische vergelijking op voor de eigenfrequenties van de kleine trillingen rond een stabiel evenwichtspunt. Het expliciet bepalen van de eigenfrequenties en de eigenmodes zelf is niet gevraagd.